This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

3 3433 06909658 8

ÉLÉMENS
DE GÉOMÉTRIE.

PAR C. KRAMP,

Professeur de Mathématiques et de Physique à l'Ecole de Cologne; des Académies d'Erford et de Rovérédo; de la Société littéraire de Mayence; et de la Société minéralogique de Jéna.

A COLOGNE,
Imprimé chez TH. F. THIRIART;
et
se vend chez HANSEN, libraire.

1806.

THE
PUBL
ASTOR, L
TILDEN FO
R

AVIS.

Tout exemplaire qui ne porteroit pas, comme ci-dessous ma signature, sera contrefait. Les mesures nécessaires sont prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricateurs et les débitans de ces exemplaires. Jean Gayard Horace.

Le nombre 4097, page 133, ligne troisième d'en bas, doit être remplacé par 65537. De même, page 180, ligne 6, il faut substituer *adjacentes* au terme *non-adjacentes*, qui est dans le texte.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE PREMIER.

LES PRINCIPES.

Num.

Objet de la Géométrie. Les deux idées de l'espace et du tems sont antérieures à toutes celles que nous avons reçues par nos sens, et il faut les excepter de la loi générale, en vertu de laquelle toutes nos idées ont été regardées comme le résultat de l'expérience . . . 1

Le corps mathématique. Il n'a d'existence réelle qu'autant qu'il joint à son étendue les qualités physiques qu'il doit avoir pour être accessible à nos sens 2

Les trois dimensions du corps mathématique. La surface plane et non-plane: la ligne droite et courbe; le point. Propriétés générales . 3

L'angle. Il exprime l'inclinaison mutuelle de deux lignes droites ou de deux plans; de même que l'inclinaison d'une droite vers un plan. Manière de le désigner. L'angle droit, aigu, obtus. Les angles de suite font ensemble la somme de deux angles droits. Les angles verticaux sont égaux entr'eux 10

La mesure de l'angle. Elle suppose la division de la circonférence de cercle en un certain nombre de parties égales. Notice sur l'ancienne division en 360 dégrés. Mesure adoptée aujourd'hui 18

La certitude géométrique, caractère essentiel des vérités qui en sont l'objet. La méthode mathé-

Num.

thématique. Axiomes, demandes, définitions, théorèmes, problèmes, lemmes, scolies. Signes dont on se sert dans la démonstration . . 23

CHAPITRE SECOND.

LES TRIANGLES ÉGAUX.

Définition du triangle. Côtés, angles, base, sommet, hauteur du triangle. Triangle équilatéral, isoscèle, scalène. Triangle rectangle, obtusangle, acutangle. Figures égales et équivalentes 33

Conditions pour que deux triangles soient parfaitement égaux entr'eux 38

L'angle externe est plus grand que chacun des deux internes opposés. Dans tout triangle le plus grand angle est constamment opposé au plus grand côté, et réciproquement . . 44

Les angles à la base d'un triangle isoscèle sont égaux entr'eux, et réciproquement. La perpendiculaire abaissée d'un point sur une ligne est plus courte que toute oblique. Une ligne oblique est plus courte que toute autre oblique qui s'écarte d'avantage de la perpendiculaire. Lorsque deux points quelconques d'une ligne droite sont à égales distances des deux extremités d'une autre, cette dernière sera divisée en deux également par la première, et fera un angle droit avec elle 49

Problèmes 52

CHAPITRE TROISIEME.

LES PARALLÈLES.

Définition de deux lignes droites parallèles . 59

Lorsque deux droites parallèles sont traversées par une troisième, les angles formés autour des deux points d'intersection, pris deux à deux

Num.

deux, seront égaux entr'eux, ou ils feront ensemble la somme de deux angles droits. Angles externes internes du même côté; externes internes alternes; externes du même côté, internes du même côté; externes alternes; internes alternes 62

L'angle externe d'un triangle est égal à la somme des deux internes opposés. La somme des trois angles internes d'un triangle est égale à celle de deux angles droits. La somme des angles externes d'un polygone quelconque est égale à celle de quatre angles droits . . 66

Le parallélogramme. Le quarré, le rectangle, le rhombe, le rhomboïde, le trapèze. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux entr'eux. Les deux diagonales du quarré, de même que du rhombe, sont perpendiculaires entr'eux 81

Problêmes 88

CHAPITRE QUATRIEME.

LE CERCLE.

Définition du cercle. Circonférence, rayon, centre, diamètre, arc, corde, apothême, segment, secteur, sécante, tangente. Propriétés générales 91

Les cordes égales d'un même cercle, ou de deux cercles égaux, soûtendent des arcs égaux: et réciproquement 108

Les quatre propriétés suivantes, de passer par le centre, de partager l'arc et la corde en deux également, et d'être perpendiculaire à la corde, conviennent toujours à la même ligne droite: de manière que toute ligne qui a deux quelconques de ces quatre propriétés, aura aussi les deux autres 112

Les trois propriétés, d'être tangente du cercle, d'être perpendiculaire au rayon, et de passer par le point d'attouchement, conviennent toujours

Num.
jours à la même ligne droite; de manière que toute ligne qui a deux quelconques de ces trois propriétés, aura aussi la troisième. . 120
Les arcs de cercle, compris entre des cordes parallèles, sont égaux entr'eux: et réciproquement 124
Intersections mutuelles de deux cercles . . 125
Tout angle à la circonférence a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés. Corollaires 130
Problêmes 139

CHAPITRE CINQUIEME.

LA MESURE DES SURFACES.

Le rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur. Le triangle est représenté par la moitié de ce même produit. Les parallélogrammes de même que les triangles, qui ont des bases et des hauteurs égales, sont équivalens entr'eux 145
Le trapèze est égal à la moitié du produit de sa hauteur, par la somme des deux bases parallèles 151
Les parallélogrammes et les triangles qui ont la même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases 152
Problêmes 153

CHAPITRE SIXIEME.

LES TRIANGLES SEMBLABLES.

Condition générale pour la ressemblance de deux figures quelconques 159
La ligne menée *parallèlement* à un des trois côtés d'un triangle quelconque, partage les deux autres côtés en parties proportionnelles; et réciproquement. 160

Con-

Num.

Conditions pour que deux triangles soient semblables entr'eux. Caractère auquel on peut reconnoitre la ressemblance de deux figures, analogue à celui de la coïncidence dans les figures parfaitement égales 163

Les triangles qui ont un angle de commun entr'eux, sont, quant à leurs surfaces dans le rapport composé des côtés qui comprennent cet angle 181

Les figures semblables sont entr'elles dans le rapport des quarrés de leurs côtés homologues 182

Lorsque deux cordes se coupent au dedans d'un cercle, le produit des deux parties de l'une est égal au produit des deux parties de l'autre 184

Le quarré de la ligne, perpendiculaire au diamètre, est égal au produit de ses deux segmens. Le quarré de toute corde est égal au produit du diamètre entier multiplié par le segment correspondant à cette corde . . 186

Lorsque deux sécantes d'un même cercle se rencontrent dans quelque point qui est hors de sa circonférence, le produit de chacune des deux sécantes, multipliée par sa partie qui est hors du cercle, est le même de part et d'autre. Le quarré de toute tangente est égal au rectangle compris sous une sécante quelconque qui part du même point, multipliée par sa partie hors du cercle 187

Dans tout quadrilatère inscrit au cercle, le produit des deux diagonales est égal à la somme des produits des deux côtés opposés . . 195

Problêmes 196

CHAPITRE SEPTIEME.

LE THÉORÈME DE PYTHAGORE.

Côtés, hypoténuse du triangle rectangle. Segmens de l'hypoténuse, correspondans aux côtés 207

Dans

Num.

Dans tout triangle rectangle, le quarré de chaque côté est égal au rectangle compris sous l'hypoténuse entière, et le segment correspondant à ce côté. De plus, le quarré de l'hypoténuse est égal à la somme des quarrés des deux côtés 208

Théorèmes concernant le quarré d'une ligne, qui est la somme ou la différence de plusieurs autres lignes. La différence des quarrés de deux lignes est égale au rectangle compris sous la somme et la différence de ces lignes 209

Dans tout triangle qui n'est pas rectangle, le quarré de chaque côté est plus grand ou moindre que la somme des quarrés des deux autres côtés, d'après que le triangle est obtusangle ou acutangle. Théorèmes qui apprennent à évaluer cette différence dans les deux cas 213

Les quarrés des cordes qui partent d'un même point de la circonférence, sont entr'eux comme les segmens correspondans du diamètre 221

Le théorème de Pythagore est applicable à toutes les figures semblables sans exception . . 223

Problêmes 224

CHAPITRE HUITIEME.

LES CERCLES INSCRITS AU TRIANGLE.

On entend ici par cercle *inscrit au triangle*, tout cercle qui touche à-la-fois ses trois côtés. Outre le cercle *interne* qui les touche *en dedans*, et qu'on désigne communément par la dénomination de cercle inscrit, il y en a encore trois autres, dont chacun touche *en dehors* un des trois côtés, et *en dedans* les prolongemens des deux côtés adjacens . . 234

Complément de chaque côté; c'est le reste qu'on obtient, en ôtant ce côté de la demi-somme des

Num.
des trois côtés. On employe ce terme pour énoncer facilement les théorèmes, qui apprennent à trouver les rayons des quatre cercles inscrits, et les distances de leurs centres, tant entr'eux, qu'aux trois angles d'un triangle dont les trois côtés sont supposés connus 243

La surface du triangle est égale à la racine quarrée du produit de la demi-somme des trois côtés, multipliée par les trois complémens . 253

Le rayon du cercle circonscrit au triangle est égal au produit des trois côtés, divisé par quatre fois l'aire du triangle 254

CHAPITRE NEUVIEME.

LES POLYGONES RÉGULIERS.

Définition. Polygones inscrits et circonscrits au cercle. Les circonférences des polygones réguliers sont entr'elles comme les rayons des cercles inscrit et circonscrit : et leurs surfaces sont comme les quarrés de ces mêmes rayons 254

Connoissant le rayon du cercle, et le côté du polygone inscrit, trouver le côté du polygone circonscrit, de même que ceux des polygones inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double 267

Triangle inscrit et circonscrit; hexagone inscrit et circonscrit. La surface du dodécagone inscrit est égale à trois fois le quarré du rayon 270

Le quarré et l'octogone, tant inscrit que circonscrit 275

Le pentagone et le décagone, tant inscrit que circonscrit. Manière de diviser une ligne donnée selon la moyenne et extrême raison. Progression numérique relative à cette division 279

La moyenne proportionnelle entre le polygone inscrit et circonscrit d'un même nombre de cô-

Num.

côtés, est le polygone inscrit d'un nombre de côtés double 283

Les cordes, appartenant à une suite d'arcs en progression arithmétique, constituent entr'elles une série récurrente 287

CHAPITRE DIXIEME.

LA QUADRATURE DU CERCLE.

La surface du cercle est plus grande que celle de tout polygone régulier, d'une circonférence égale à la sienne 292

Connoissant le rayon du cercle, et la corde d'un arc quelconque, trouver la longueur de cet arc 301

Trouver le rapport du diamètre à la circonférence. En inscrivant et circonscrivant au cercle un polygone de 96 côtés, on trouve ce rapport entre 3,1415926 et 3,1415927 . . 302

Trouver la surface d'un secteur, d'un segment circulaire 305

CHAPITRE ONZIEME.

LES PLANS.

Angle linéaire, inclinaison mutuelle de deux lignes droites. *Angle plano-linéaire*; inclinaison d'une droite vers un plan. *Angle plan*; inclinaison mutuelle de deux plans. Note concernant le sens qu'on attache ici au terme d'*angle plan*. On employe quatre lettres pour le désigner: et cinq lettres pour désigner l'angle plano-linéaire 306

Ligne droite et surface plane, parallèle à une autre surface plane. Corollaires . . . 311

Condition pour qu'une ligne droite soit *perpendiculaire* à un plan. Construction graphique des angles que fait une ligne oblique vers un plan

Num.
plan donné, avec toutes les autres lignes qu'on peut mener par son pied dans le plan . 318
Réduction de l'angle plano-linéaire à l'angle linéaire 332
Réduction de l'angle plan à l'angle linéaire. Tout plan conduit suivant une ligne qui est perpendiculaire à un plan, est perpendiculaire à ce même plan. L'intersection commune de deux plans qui sont perpendiculaires à un troisième, est perpendiculaire sur ce même plan. 338
Construction graphique des angles que fait successivement un plan avec un autre plan donné, en tournant autour d'un axe quelconque . 347
Des lignes partant d'un même point, et traversant deux plans parallèles entr'eux, sont toujours coupées par ces plans dans des parties proportionnelles ; et les polygones qui résultent de leurs points d'intersection avec les deux plans, sont semblables entr'eux . . 350

CHAPITRE DOUZIEME.

L'ANGLE SOLIDE.

L'angle solide est l'espace angulaire indéfini, compris entre plusieurs surfaces, qui se rencontrent dans un point. Angle solide *triëdre*, *tetraëdre*, *pentaëdre*. L'angle solide est à l'angle linéaire, ce que le corps est à la surface, ou ce que la surface est à la ligne . 352
Le *triangle*, le *quadrilatère*, le *polygone sphérique*. L'angle *dièdre*, représenté par le *fuseau sphérique*. Le triangle sphérique *tri-rectangle* est l'unité angulaire, à laquelle on rapporte tous les angles solides; on lui donne le nom *d'orthoëdre* 360
La somme de deux triangles opposés, formés par deux grands cercles qui se coupent dans un hémisphère, est égale au fuseau sphérique que ces mêmes cercles comprennent entr'eux 377

L'aire

Num.

L'aire d'un triangle sphérique quelconque est égale à l'excès de la somme de ses trois angles sur deux angles droits; l'orthoëdre étant pris pour unité 379

Egalité par symmétrie : polygones sphériques et corps symmétriquement égaux entr'eux . . 392

Construire graphiquement les trois angles plans et les trois angles plano-linéaires d'un trièdre dont les trois angles linéaires sont donnés . 400

Connoissant deux angles linéaires d'un trièdre, avec l'angle plan compris entr'eux, construire graphiquement l'angle linéaire de la troisième face, de même que les deux angles plans qu'elle fait avec les deux autres . . . 403

Connoissant deux angles plans d'un trièdre quelconque, avec l'angle linéaire qu'ils comprennent entr'eux, construire graphiquement le troisième angle plan, de même que les deux angles linéaires, opposés aux deux angles plans donnés 404

Connoissant les trois angles d'un trièdre, construire graphiquement ses trois côtés . . 416

CHAPITRE TREIZIEME.

LE TRIÈDRE RECTANGLE.

Cotés, *angles*, *hypoténuse*, *base* d'un trièdre rectangle 418

Connoissant les deux côtés d'un trièdre rectangle, construire graphiquement son hypoténuse et ses deux angles, de même que l'élévation de l'extrémité de sa base sur le plan de l'hypoténuse 420

Connoissant l'hypoténuse d'un trièdre rectangle, et un de ses côtés, construire graphiquement l'autre côté, et ses deux angles . . . 435

Connoissant un des côtés du trièdre, avec l'angle opposé, construire graphiquement l'autre côté, l'autre angle, et l'hypoténuse 436

Connoissant l'un des deux côtés d'un trièdre rectangle, avec l'angle adjacent, construire gra-

Num.
graphiquement l'autre côté, l'autre angle et l'hypoténuse 438
Connoissant l'hypoténuse d'un trièdre rectangle, et l'un des deux angles, construire graphiquement l'autre angle et les deux côtés . . 439
Connoissant les deux angles d'un trièdre rectangle, construire graphiquement les deux côtés et l'hypoténuse 440

CHAPITRE QUATORZIEME.

LES PROJECTIONS.

La *projection d'un point sur un plan*, est le pied de la perpendiculaire, abaissée du point sur le plan. Les plans *déterminateurs*, *horizontal* et *vertical*. On donne le nom de *base* à l'intersection commune des deux plans. Les *traces* d'un plan ; de même que les *traces* d'une ligne 441
Connoissant les projections de deux points dans l'espace, trouver les traces de la ligne qui joint les deux points 458
Les mêmes choses étant supposées, déterminer les angles que fait cette même ligne, tant avec la base qu'avec les deux plans déterminateurs 462
Connoissant les projections de trois points quelconques, trouver les traces du plan qui passe par ces points 464
Connoissant les traces d'un plan, trouver celle d'un second plan parallèle au premier, et passant par un point, dont les projections sont données 465
Connoissant les traces d'un plan, et les projections d'une ligne qui le traverse, déterminer les projections du point de leur intersection mutuelle 466
Connoissant les deux traces d'un plan, abaisser d'un point dont les projections sont données, une perpendiculaire sur le plan . . . 467

Les

Num.

Les deux projections d'une ligne, et celles d'un point étant données, trouver les traces d'un plan, mené par le point perpendiculairement à la ligne 468

Abaisser d'un point une perpendiculaire sur une ligne donnée, les projections de l'un et de l'autre étant supposées connues 469

Connoissant les projections de deux lignes menées dans l'espace, trouver les traces d'un plan, conduit suivant l'une, et parallèle à l'autre 470

Construire la plus courte distance entre deux lignes dont les projections sont données . . 473

CHAPITRE QUINZIEME.

LES POLYÈDRES.

Le nombre des angles solides d'un polyèdre quelconque est égal à celui de ses arêtes, *moins* celui de ses faces, *plus* deux 477

La pyramide, régulière et irrégulière, entière et tronquée 479

Le prisme régulier et irrégulier; droit et oblique. Le parallèlépipède, le cube. 482

CHAPITRE SEIZIEME.

LA MESURE DES SOLIDES.

La solidité d'un parallèlépipède, d'un prisme droit, de même que celle d'un prisme quelconque, est égale au produit de sa base par sa hauteur 489

La solidité d'une pyramide quelconque est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur 506

Toute pyramide tronquée à bases parallèles est la somme de trois pyramides entières de la même hauteur qu'elle, et qui ont pour leurs trois

Num.

trois bases, les deux bases opposées de la pyramide, et une moyenne proportionnelle entre les deux bases 510

Tout prisme triangulaire *obliquement tronqué*, est la somme de trois pyramides, ayant pour base commune l'une des deux bases opposées du prisme, et pour sommets les trois angles de l'autre 512

Toutes les sections qu'on peut faire dans un corps prismatique quelconque, et qui font le même angle avec sa base, sont équivalentes entr'elles. Le rapport de la base à la section dépend uniquement de la quantité de cet angle 514

Surfaces des prismes et des pyramides . . 517

CHAPITRE DIX-SEPTIEME.

LES POLYÈDRES SEMBLABLES.

Deux pyramides triangulaires sont semblables, lorsque leurs faces homologues sont des triangles semblables entr'eux. Développement ultérieur de cette définition 530

Les volumes de deux pyramides triangulaires qui ont un angle trièdre de commun entr'elles, sont donc entr'eux comme les produits des arêtes qui comprennent cet angle . . . 534

Les polyèdres semblables. Leurs surfaces sont entr'elles comme les quarrés des arêtes homologues; et leurs volumes, comme les cubes de ces arêtes 536

Trouver le rapport entre les côtés homologues de deux polyèdres semblables entr'eux . . 540

Le nombre des données nécessaires et indépendantes entr'elles, pour déterminer un polyèdre quelconque, parmi tous ceux de la même espèce, est égal au nombre de ses arêtes. 542

CHA-

CHAPITRE DIX-HUITIEME.

LES TROIS CORPS RONDS.

Num.

Le cylindre, droit et oblique 545

Le cône droit, entier et tronqué. . . . 549

La sphère. Le segment sphérique. La zone, la calotte, la flèche. Le secteur sphérique. Axe et poles d'une section sphérique . . 560

Surface du corps, produit par la révolution d'un polygone régulier, autour d'un de ses diamètres. Détermination du rapport dans lequel cette surface est aggrandie, lorsqu'en conservant le contour du polygone, on double le nombre de ses côtés 573

Surface de la sphère entière, et d'une zone sphérique 580

Volume du corps, produit par la révolution d'un polygone régulier quelconque autour d'un de ses diamètres 586

Volume d'un secteur sphérique et d'un segment sphérique, compris entre deux cercles parallèles entr'eux. Volume de la sphère entière. 591

ERRATA ESSENTIELS.

P. 133 ligne *dernière* au lieu de $2n+1$ lisez 2^n+1.

» 186 » *dernière* » » rélation » rotation.

ÉLÉ-

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

Les Principes.

1. La Géométrie a pour objet les quantités, en tant qu'elles ont de l'étendue.

Un retour attentif sur nous-mêmes nous apprend que les deux grandes idées *d'étendue* et de *durée*, c'est-à-dire, de *l'espace* et *du tems*, sont antérieures à toutes celles que nous avons reçues par nos sens; et qu'il faut les excepter de la loi générale, en vertu de laquelle toutes nos idées ont été regardées comme le résultat de l'expérience. C'est au contraire par elles que notre entendement devient susceptible de recevoir les impressions des sens, et de les employer pour se former d'autres idées. Nous ne pouvons nous représenter dans l'esprit un être quelconque, sans lui supposer de l'étendue, ni un évènement quelconque sans lui supposer de la durée: et quelqu'abstraites que soient nos idées de l'un et de l'autre, les deux idées fondamentales de l'espace et du tems s'y trouvent toujours tacitement comprises.

L'espace, objet de l'idée générale que nous nous faisons de l'étendue, n'a d'autres limites que ceux que notre entendement veut lui supposer: il doit être considéré comme infini en lui-même, et il est la somme de tous les espaces partiels et limités, qui sont l'objet de la science que nous traitons.

2. Une portion quelconque de cet espace infini, bornée de toutes parts par les limites

que notre entendement a voulu lui supposer, prend le nom de *corps mathématique.*

Le corps mathématique n'a donc une existence réelle, qu'autant qu'il joint à l'étendue, les qualités physiques qu'il doit avoir pour être accessible à nos sens: et alors il est ce que nous nommons *solide.* Dépourvu de toutes les qualités physiques, et n'ayant que l'étendue seule, le corps mathématique n'est qu'un simple être de raison, mais admettant, comme tel, une infinité de recherches d'une vérité démontrée, lesquelles ensuite sont applicables aux solides réels.

3. Le corps mathématique et limité, comme faisant une partie quelconque de l'espace indéfini, a nécessairement ses trois dimensions, que nous désignons par les noms de *longueur*, de *largeur*, et de *hauteur*, *profondeur*, ou *épaisseur.* Si nous nous arrêtons aux *surfaces* qui le terminent, ces surfaces, n'ayant plus que deux dimensions, nous présentent l'exemple d'une étendue en longueur et en largeur, mais dépourvue d'épaisseur.

4. En nous bornant encore aux limites entre lesquelles la surface se trouve comprise, nous reconnoissons dans ces limites l'exemple d'une étendue en longueur, mais dépourvue de largeur et d'épaisseur. Ces limites sont appellées *lignes.*

5. La ligne enfin est terminée de part et d'autre par des *points*, qui n'ont plus aucune espèce de dimension. Les points cependant sont encore un objet de notre entendement, et ils peuvent être considérés comme le principe générateur de toute étendue, produite par le mouvement.

Dans

Dans l'impossibilité de présenter à nos sens des points, des lignes, des surfaces mathématiques, nous sommes obligés de leur substituer des points, des lignes, des surfaces matérielles, douées de toutes les trois dimensions, et ayant de plus des qualités physiques, qui ne devroient jamais entrer dans une considération purement mathématique. Nous faisons abstraction de ces dernières autant que nous le pouvons: et quant aux autres, nous tachons de donner à nos lignes aussi peu de largeur, et à nos surfaces aussi peu d'épaisseur que l'imperfection inévitable des instrumens nous permet de faire.

6. Une ligne peut être considérée comme produite par le mouvement d'un point, dans un sens, et suivant des directions quelconques. Si ce mouvement se fait constamment dans la même direction, il en résulte la *ligne droite*; c'est le chemin le plus court pour aller d'un point vers un autre point: aussi exprime-t-elle la distance qui est entre deux points quelconques. La ligne droite peut être prolongée indéfiniment au-delà des deux points qui la terminent de part et d'autre. Toute ligne qui n'est pas droite, prend le nom de *courbe*. L'intersection de deux lignes qui se rencontrent, se fait toujours dans un point.

L'idée de la ligne droite est si simple, que par sa simplicité même il devient difficile de la définir. L'expérience nous en fournit des exemples sans nombre dans les *cordes tendues*, les *fils à plomb*, les *rayons visuels* etc. Cependant les idées de *distance* et de *direction*, qui supposent déjà celle de la *ligne droite*, se présentent si naturellement à l'esprit, qu'il est permis de douter, si réellement cette dernière est le résultat de l'expérience.

7. La surface peut être considérée de même comme produite par le mouvement de toute

ligne, droite ou courbe, dans tout autre sens que dans celui de sa longueur. La surface plane est celle à laquelle on peut appliquer exactement une ligne droite dans tous les sens. L'intersection de deux surfaces qui se rencontrent, est toujours une ligne. La surface plane peut être prolongée indéfiniment, dans le sens de chacune des deux dimensions dont elle est composée.

8. Le corps enfin peut être considéré comme produit par le mouvement de toute surface quelconque, dans un sens différent de celui de chacune de ses deux dimensions. L'intersection commune d'un corps et d'une surface quelconque, est elle-même une surface, faisant partie de la surface sécante, et terminée par une ligne qui se trouve toute entière dans la surface du corps coupé. L'intersection commune d'un corps et d'une ligne est elle-même une ligne, faisant partie de la ligne sécante, et terminée de part et d'autre à la surface du corps.

9. De ce qu'une ligne droite est la trace d'un point, mû suivant une direction constante d'un de ses bouts à l'autre, il s'ensuit que deux points donnés ne peuvent être joints que par une seule ligne droite : que la position d'une ligne droite est déterminée par deux quelconques de ses points; que deux lignes droites ne peuvent se rencontrer que dans un seul point, et que jamais elles ne suffisent pour renfermer un espace.

10. Outre les trois espèces d'étendues parfaitement limitées que nous venons d'exposer, il y a encore un genre d'étendues indéfinies, qui sans être ni lignes, ni surfaces, ni corps, sont cependant susceptibles, comme elles, d'augmentation et de diminution, admettant, comme elles, une mesure fixe et invariable, et entrant comme partie nécessairement constituante dans toutes les considérations des lignes, des surfaces, et des corps. Ces quantités résultent de l'inclinaison plus ou moins grande d'une ligne droite vers une autre, ou vers une surface plane, ou de l'inclinaison mutuelle de deux surfaces planes.

11. Nous appellons *Angle (Fig. 1.)*, l'inclinaison d'une ligne droite AB vers une autre AC, qu'elle rencontre quelque part en A. Le point de rencontre A est nommé *sommet de l'angle*, les lignes elles-mêmes AB et AC en sont les *côtés*. Comme on peut indéfiniment prolonger ces deux lignes sans que leur inclinaison mutuelle en soit affectée, il est visible que la quantité de l'angle est indépendante de la longueur de ses côtés.

Pour désigner un angle, on emploie trois lettres; en mettant au milieu celle qu'occupe le sommet de l'angle, et en prenant les deux autres sur les côtés. C'est ainsi que l'angle formé par la rencontre des lignes AB et AC, sera marqué BAC ou CAB. S'il n'y a qu'un seul angle au point A, la lettre placée près de ce point suffira pour désigner l'angle.

L'inclinaison d'une ligne droite vers un plan, aussi bien que l'inclinaison mutuelle de deux plans, est toujours réductible à l'angle formé par la rencontre de deux lignes. Il faudra employer *quatre*

et

et même *cinq* lettres pour désigner un angle semblable ; ce que nous verrons en son lieu.

12. Lorsque la ligne AD *(Fig. 2.)* rencontre la droite EAC sous une inclinaison telle, qu'il en résulte de part et d'autre du point A, les angles égaux DAC et DAE, ces angles prennent le nom *d'angles droits ;* et la ligne elle-même DA, qui ne penche alors ni vers C, ni vers E, est dite *perpendiculaire* sur EAC.

13. Lorsqu'au contraire la droite AB est tellement inclinée vers EAC, qu'il en résulte de part et d'autre du point A, les angles inégaux BAC et BAE, l'un des deux, BAC, qui sera moindre que l'angle droit DAC, est nommé *aigu :* et l'autre BAE, qui sera plus grand que l'angle droit DAE, prend le nom *d'obtus.*

14. Les deux angles BAC et BAE sont appellés *angles contigus* et *angles de suite ;* et on voit par l'inspection de la figure, que la somme de deux angles de suite équivaut toujours à celle de deux angles droits.

15. On peut exprimer plus généralement cette proposition, et dire *(Fig. 3.)*, que quelque soit le nombre des lignes droites AB, AF, AG, AH, partant toutes d'un même point A, et tirées du même côté d'une autre droite quelconque EAC, la somme de tous les angles compris entre ces lignes et la droite EAC, équivaut à celle de deux angles droits.

16. C'est par cette même raison *(Fig. 4.)*, qu'en menant d'un point quelconque A autant de droites qu'on voudra, telles que AB, AC, AD,

AD, AE, répandues dans le plan dans lequel on suppose le point A, la somme de tous les angles formés par ces lignes, équivaut à celle de quatre angles droits.

17. Lorsque la droite AB traverse entièrement la droite EAC *(Fig. 5.)*, et qu'elle est prolongée indéfiniment au-delà du point A, il en résulte autour de ce point quatre angles, lesquels pris deux à deux, forment des *angles de suite;* et parmi lesquels ceux qui sont opposés au sommet, tels que BAC et FAE, ou BAE et FAC, sont nommés *verticaux*. Il suit de la nature de la ligne droite, et de sa direction constante dans tous les points, que les angles verticaux sont égaux entr'eux.

Il me semble qu'on pourroit se contenter du simple énoncé de cette vérité, qui est visiblement fondée dans l'idée même de la ligne droite. Voilà cependant la démonstration qui se trouve dans tous les Élémens de Géométrie, depuis *Euclide* jusqu'à nos jours.

Les angles BAC et BAE sont des angles de suite: les angles FAE et BAE le sont aussi. Ainsi les angles BAC et FAE expriment l'un et l'autre ce qu'il faudroit ajouter à l'angle BAE, pour faire de part et d'autre une somme égale à celle de deux angles droits. Donc ils sont égaux entr'eux.

Il faut observer au sujet des deux propositions, concernant la somme de deux angles de suite égale à celle de deux angles droits, et l'égalité mutuelle de deux angles verticaux entr'eux, qu'elles sont du nombre de celles, dont l'inverse est également admissible.

C'est ainsi que *(Fig. 2.)* si les deux angles adjaunts BAC et BAE valent ensemble deux droits, les deux côtés AC et AE, seront en ligne droite.

Car

Car les deux lignes AC et AB étant données, il n'y a certainement qu'une seule ligne AE, qui puisse être le prolongement de AC.

Il n'y en a non plus qu'une seule, qui puisse faire avec AB un angle, tel que la somme des deux angles BAC et BAE soit égale à deux droits.

Donc, si la proposition directe est vraie, l'inverse doit l'être également.

On prouvera de la même manière, que si les angles verticaux sont égaux entr'eux (*Fig.* 5.), la ligne EAC étant reconnue pour une ligne droite, les deux lignes AB et AE seront aussi en ligne droite.

18. Le grand objet de la Géométrie est la mesure des quantités étendues, et leur réduction à d'autres quantités étendues de la même espèce, qu'on suppose connues, et qui par cette raison peuvent servir de mesure aux autres. C'est ainsi qu'une ligne droite connue sert de mesure aux longueurs : une surface plane connue est employée pour mesurer les surfaces : et on choisit quelque corps régulier et connu, pour déterminer le volume de tous les corps en général. Il nous reste donc à parler des moyens qu'on a employé pour mesurer les angles.

19. On peut se représenter un angle quelconque PAQ (*Fig.* 6), compris entre les côtés AP et AQ, comme engendré par le mouvement de la droite AP autour du sommet A, dans un plan que je suppose être celui de la table. En vertu de ce mouvement, chaque point de la droite AP décrit autour du sommet A un arc de cercle, qui a pour rayon la dis-

distance de ce point au sommet de l'angle et qui est intercepté entre ses côtés. Ainsi les points B, C, D, E, décriront respectivement les arcs de cercle BG, CH, DI, EK, dans le tems que le côté AP aura employé, pour arriver de sa position primitive AP, dans sa nouvelle position AQ.

20. De plus, comme le mouvement de la droite entière AP est simultané avec celui de chacun de ses points, il est clair que lorsque la droite AP aura décrit un espace quelconque indéfini PAQ, égal à une partie aliquote quelconque, à un dixième par exemple, de sa révolution entière autour du sommet A, chacun de ses points, tel que B, C, D, ou E, aura aussi décrit un arc de cercle, tel que BG, CH, DI, EH, égal à la dixième partie de la circonférence entière, qui a pour rayon la distance de ce point au sommet de l'angle.

21. Donc, l'angle PAQ lui-même n'étant autre chose que le rapport de l'espace indéfini PAQ, compris entre les deux côtés de l'angle AP et AQ, à l'espace entier dont A est supposé le centre, vous aurez une mesure très-exacte de cet angle, en décrivant de son sommet A, avec un rayon pris à volonté, une circonférence de cercle. Le rapport de l'arc, intercepté entre ses côtés, à la circonférence entière, ou à la demi-circonférence, ou au quart de circonférence, sera la mesure de la quantité de l'angle.

22. Dans toute la suite de cet ouvrage, nous regarderons l'angle droit, où le quart de cir-

circonférence décrit avec un rayon arbitraire, comme l'unité angulaire, à laquelle nous rapporterons tous les angles quelconques, en les exprimant par les fractions, qui expriment les rapports qu'ils ont avec l'angle droit.

La division de la circonférence de cercle en 360 dégrés, du dégré en 60 minutes, de la minute en 60 sécondes etc. qui a été généralement reçue parmi les géomètres pendant une longue suite de siècles, nous vient originairement des Egyptiens. Ils avoient adopté le nombre 360 préférablement aux autres, à cause de l'avantage qu'il a d'être exactement divisible par 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 etc.

Cependant les Géomètres les plus célèbres des derniers tems, parmi lesquels nous nous contenterons de citer *Henri Briggs*, *Henri Gellibrand*, *Jean Newton*, *Nicolas Mercator*, ont senti déjà qu'aucune raison ne devoit prévaloir sur les avantages immenses de la subdivision décimale.

Tel a été aussi dans tous les tems le principe de la Géométrie Chinoise, nation égale aux Egyptiens par l'ancienneté, et recommandable dès-lors par une masse de lumières qu'elle a toujours été jalouse de conserver.

La division décimale, dans laquelle l'angle droit ou le quart de circonférence est toujours regardée comme unité angulaire, est exclusivement reçue aujourd'hui dans les ouvrages des Géomètres François: elle fera oublier enfin l'ancienne division par 360, et par 60, qui nous oblige à des calculs beaucoup trop compliqués.

Comme on est souvent obligé de réduire les dégrés, minutes et secondes à des parties décimales de l'angle droit, et réciproquement, on pourra suivre la règle très-simple, que j'ai donnée dans mes *Elémens d'Arithmétique*, page 37, à laquelle je renvoye mes lecteurs.

23. Les vérités mathématiques, n'ayant d'autre objet que des notions sur l'étendue qui ne viennent point originairement de l'impression de nos sens, et qui sont antérieures à toute expérience, ont un caractère qui les distingue de toutes les autres branches des connoissances humaines. Ces dernières sont plus ou moins revendiquées par l'expérience qui les a fournies, et à qui l'entendement humain en est toujours redevable. Les vérités mathématiques sont l'ouvrage et la propriété exclusive du géomètre dans la tête duquel elles ont pris naissance, et où elles se sont successivement développées : et comme elles sont absolument indépendantes du témoignage toujours défectueux, souvent trompeur, rarement décisif de nos sens, elles en acquièrent un caractère de clarté, de certitude et d'évidence, auxquelles nos autres connoissances ne peuvent jamais atteindre. Dans toutes les sciences naturelles sans exception, le raisonnement le plus profond et le plus concluant, est toujours subordonné à l'expérience : dans la géométrie seule, et dans les parties qui en dépendent, toutes les preuves tirées de l'expérience ne peuvent jamais prévaloir contre la rigueur de la démonstration. Ici, la certitude porte toute l'empreinte d'une vérité inébranlable ; tandis que par-tout ailleurs, ce que nous appellons certitude, n'est jamais qu'une probabilité plus ou moins forte.

24. C'est ce catactère particulier des vérités mathématiques, qui a permis d'établir dans l'enseignement de la science une méthode particulière,

ticulière, recommandable par sa clarté, son évidence et la marche régulière qu'elle présente, mais qu'on tacheroit vainement d'appliquer aux autres sciences quelconques.

25. Le géomètre commence par des *Axiomes*. Ce sont des vérités tellement évidentes par elles-mêmes, que tout le genre humain est obligé d'en convenir, et qu'il seroit impossible de les ramener à d'autres propositions plus évidentes.

Voici les axiomes qu'*Euclide* a mis à la tête de ses Élémens.

Le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

Le tout est plus grand qu'une de ses parties.

Deux lignes droites n'enferment point un espace.

Si deux lignes droites se coupent l'une l'autre, elles se couperont en un point.

Les lignes ou les surfaces, qui étant appliquées les unes sur les autres se conviennent parfaitement, sont égales entr'elles.

Les quantités égales à une même grandeur, sont égales entr'elles.

Si à des quantités égales on ajoute des quantités égales, ou qu'on en retranche des quantités égales, les sommes dans le premier cas, et les excès dans le second, seront égaux entr'eux.

Si des quantités égales sont multipliées ou divisées par le même nombre, les produits dans le premier cas, et les quotiens dans le second seront égaux entr'eux.

Si à des quantités inégales on ajoute des quantités égales, ou qu'on en retranche des quantités égales,

égales, les touts dans le premier cas, et les restes dans le second seront inégaux entr'eux: et dans les deux cas la différence entre les nouvelles quantités qui en résultent, sera encore la même que celle qui existoit entre les deux quantités inégales, avant qu'on y eut ajouté les unes, ou qu'on en eut retranché les autres.

26. A ces axiomes, les anciens géomètres faisoient succéder des *demandes*. Ce sont des suppositions d'opérations, auxquelles toute solution d'un problème quelconque de géométrie se réduit, et qu'on peut faire sans difficultés, ou qu'on peut au moins imaginer.

Voici les trois demandes d'Euclide:

D'un point quelconque on peut tirer une ligne droite à tout autre point.

Il est possible de prolonger toute ligne droite au-delà des deux limites qu'elle a de part et d'autre.

Il est possible de décrire un cercle de tel centre et de tel rayon qu'on veut, ou d'imaginer que ce cercle est décrit.

On voit par ces demandes que la *règle* et le *compas* sont les seuls instrumens admis dans une construction géométrique.

27. Le géomètre n'employe aucun terme un peu obscur ou équivoque, sans qu'il l'ait préalablement défini: et il n'employe dans ces *définitions* que des termes parfaitement connus ou déjà expliqués. Créateur lui-même de toutes les notions qu'il employe, il est toujours le maître de mettre dans ses définitions la clarté nécessaire, pour ne laisser lieu à aucun doute, et pour faire disparoitre toute équivoque.

28.

28. Les *théorèmes* sont des vérités qui, sans être évidentes par elles-mêmes, le deviennent cependant par le moyen d'un raisonnement qu'on appelle *démonstration*. Souvent, et surtout lorsqu'on les applique à des cas particuliers, on peut en tirer des conséquences presque immédiates, qui alors sont représentées comme *corollaires*.

29. Les *problêmes* sont des propositions dans lesquelles il s'agit de découvrir une vérité, ou d'exécuter quelque chose qu'on demande. Le problême est toujours suivi de sa *solution*, et cette solution de sa *démonstration*.

30. Le *lemme* est une proposition subsidiaire, et placée hors de l'ordre établi, qu'on démontre pour faciliter la démonstration, ou la solution d'un problême plus difficile.

31. Les *scolies* enfin sont des remarques qu'on fait à la fin d'une ou de plusieurs propositions, afin d'en montrer l'application, la liaison, ou la généralité. Souvent on y renferme des notices historiques, qui peuvent ajouter de l'intérêt aux propositions qu'on a démontrées.

32. Dans l'exposé des démonstrations, on ne peut guères se passer entièrement de l'emploi des signes, pour marquer les quatre opérations de l'arithmétique, l'élévation au quarré et au cube, de même que l'extraction des deux racines, quarrée et cubique. Ce sont les mêmes que nous avons déjà enseigné dans les élémens d'arithmétique.

Le

Le signe $=$ est celui de l'égalité; il se met entre les quantités qu'on suppose égales. $A=B$ veut dire A égal à B.

Le signe $>$ ou $<$ est celui de l'inégalité: il se met de manière que la plus grande des deux regarde l'ouverture de l'angle, tandis que la moindre se trouve près de la pointe. $A > B$ ou $B < A$ veut dire: A est plus grand que B, ou B est moindre que A.

Le signe $+$ exprime la somme des quantités entre lesquelles il est placé. Il se prononce *plus*.

Le signe $-$ exprime leur différence; savoir, l'excès de celle qui est à la gauche du signe sur celle qui est à sa droite. Il se prononce *moins*.

Tant que deux ou plusieurs facteurs d'un produit sont désignés par de simples lettres, telles que A, B, C, D etc. le produit lui-même pourra fort bien être écrit ABCD etc. sans aucun signe intermédiaire.

Si ces facteurs sont composés eux-mêmes d'autres quantités jointes ensemble par les signes *plus* ou *moins*, il est indispensable de les enfermer de part et d'autre dans une *parenthèse*. Le produit de deux facteurs, tels que $A - B$, et $A + B - C$, sera écrit $(A-B)\ (A + B - C)$.

Si les facteurs sont des lignes, dont chacune est désignée par deux lettres, on se sert du signe $\times$, mis entre les lignes dont on veut indiquer le produit. Le produit des deux lignes AB et CD sera donc écrit $AB \times CD$. Celui des trois lignes AB, CD, et DE s'écrira $AB \times CD \times DE$.

Le signe $:$ est celui de la division; il est placé de manière qu'il ait à sa gauche le dividende, et à sa droite le diviseur. Ainsi $A : B$ est le quotient de la division de la quantité désignée A, par la quantité désignée B. Ou bien, $AB \times CD : DE$, est le quotient qui résulte, en divisant le produit

des

des deux lignes AB et CD, par la ligne DE. Ce même signe est celui du rapport géométrique.

Souvent aussi on employe le signe fractionnaire, en plaçant le dividende en haut, le diviseur en bas, et en les séparant par un trait horizontal. Cependant nous ne ferons guères usage de cette notation dans nos démonstrations géométriques.

CHAPITRE SECOND.

LES TRIANGLES ÉGAUX.

Définitions.

33. Une figure comprise entre trois lignes droites quelconques, est appellée *triangle*. Un triangle a donc trois *côtés*, et trois *angles* opposés à ces côtés. Le triangle étant posé sur un de ses trois côtés, ce côté prend le nom de *base*; l'angle opposé en devient le *sommet*; et on nomme *hauteur* du triangle, la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base, prolongée hors du triangle, en cas de besoin.

C'est ainsi que, regardant le côté AC (*Fig.* 7.), comme la base du triangle ABC, le point B en devient le sommet, et la perpendiculaire BD en est la hauteur.

Dans le triangle ABC (*Fig.* 8.) il a fallu prolonger la base AC, afin d'abaisser sur elle du point B la perpendiculaire BD, laquelle, quoique entièrement hors du triangle, en exprime pourtant la hauteur, c'est-à-dire, l'élévation du sommet B au-dessus de la base AC.

34. Le *triangle équilatéral* est celui dont les trois côtés sont égaux. Le *triangle isoscèle* n'a

n'a que deux côtés égaux. Dans le *triangle scalène* tous les trois côtés sont inégaux entr'eux.

Le triangle ABC (*Fig.* 9.) est équilatéral. Le triangle ABC (*Fig.* 10.) est isoscèle. Les deux triangles (*Fig.* 7. 8.) sont scalènes.

35. Le triangle qui a un angle droit parmi ses trois angles, est nommé *rectangle*. Celui qui a un angle obtus, est nommé *obtusangle (amblygone)*. Tout autre triangle est nommé *acutangle (oxigone)*.

Les triangles BDA, BDC (*Fig.* 7. 8.) sont rectangles en B. Le triangle BCA (*Fig.* 8.) est obtusangle en C. Les triangles ABC (*Fig.* 7. 9.) sont acutangles.

36. Deux triangles, et généralement deux figures quelconques, sont nommées *égales* ou *parfaitement égales*, lorsque tous les angles et tous les côtés de l'une sont égaux aux angles et aux côtés semblablement disposés dans l'autre, de manière que, mises l'une sur l'autre, elles coïncident dans toutes leurs parties.

37. Deux triangles, ou deux figures en général, égales seulement en surface, mais sans coïncider dans toutes leurs parties, sont nommées *équivalentes*.

Problême.

38. *Construire sur la ligne indéfinie DG un triangle, dont les trois côtés soient egaux à ceux d'un autre triangle donné, tel que ABC.* (Fig. 11.)

Ayant pris avec le compas la base AC du triangle ABC, vous la porterez de D en F. Ensuite, du centre D, avec le rayon AB, décrivez l'arc de cercle indéfini *mn*. Du centre F, avec le rayon BC, décrivez l'autre arc de cercle indéfini *po*. Du point d'intersection E de ces deux arcs tirez les droites ED et EF. Ainsi, ayant fait DF = AC, DE = AB, FE = CB, les côtés du triangle DEF seront respectivement égaux à ceux du triangle proposé ABC, et le problême sera résolu.

39. *Corollaire* I. Le triangle DEF sera parfaitement égal au triangle proposé ABC. Car les deux extrémités de la base étant fixées en D et en F, il ne restera plus à déterminer que la position du sommet. Ce sommet doit nécessairement se trouver sur l'arc de cercle indéfini *mn*, parceque c'est là seul que sont tous les points, éloignés de D d'une distance égale à AB. Il doit encore se trouver sur l'arc de cercle indéfini *op*, parceque tous les points, éloignés de F d'une distance égale à BC, ne peuvent être ailleurs que sur une circonférence de cercle, dont le centre est F, et donc le rayon est égal à BC. Il est visible de plus que ces deux arcs de cercle ne peuvent se rencontrer au-dessus de la ligne DG que dans un seul point, qui est E. Ce point sera donc le sommet qu'il restoit à déterminer ; ainsi, joignant les points D et E par la droite DE, et les points E et F par la droite EF, on n'obtiendra qu'un seul triangle DEF, qui sera nécessairement égal au triangle donné ABC.

40.

40. *Corollaire* II. On voit par cette construction que, les trois côtés d'un triangle étant une fois déterminés, les angles se déterminent d'eux-mêmes, et qu'ils ne dépendent plus de la volonté de celui qui fait la figure. On peut donc proposer comme théorème, suffisamment démontré par la construction précédente, la proposition qui suit.

THÉORÈME.

41. *Lorsque les trois côtés d'un triangle sont les mêmes que les trois côtés d'un autre, ces deux triangles seront parfaitement égaux, de sorte que les angles, opposés aux côtés égaux, seront aussi égaux entr'eux.*

THÉORÈME.

42. *Lorsque deux côtés avec l'angle qu'ils comprennent, sont les mêmes dans deux triangles, ces triangles seront parfaitement égaux; de manière que les deux angles qui restent, et le troisième côté qu'ils comprennent, seront les mêmes dans l'un et dans l'autre. (Fig. 12.)*

Je suppose que dans les deux triangles ABC, DEF, l'angle A soit égal à l'angle D, le côté AB égal au côté DE, le côté AC égal au côté DF, et j'en conclus que les deux triangles sont parfaitement égaux. Pour le prouver, essayez de les mettre l'un sur l'autre, en commençant par AC, que vous mettrez sur DF, et qui la couvrira parfaitement, parce-qu'elle lui est égale. Le côté AB tombera le

long de DE, parceque les angles A et D sont égaux entr'eux. Enfin le point B se trouvera sur E, parceque les côtés AB et DE sont aussi égaux. Ainsi, les deux triangles coïncideront parfaitement. Donc ils seront égaux dans toutes leurs parties.

THÉORÈME.

43. *Lorsque deux angles avec le côté qu'ils comprennent, sont les mêmes dans deux triangles, ces triangles seront parfaitement égaux; de manière que les deux côtés qui restent, et le troisième angle qu'ils comprennent, seront les mêmes dans l'un et dans l'autre.* (Fig. 12.)

Je suppose que dans les deux triangles ABC, DEF, le côté AC soit égal au côté DF; l'angle A égal à l'angle D, l'angle C égal à l'angle F. J'en conclus que les deux triangles seront parfaitement égaux. Pour le prouver, essayez de mettre le triangle ABC sur le triangle DEF, en commençant par le côté AC, que vous mettrez sur DF, et qui la couvrira, parcequ'elle lui est égale. Dans cette position, le côté AB tombera le long de DE, parceque les angles A et D sont égaux entr'eux. Le côté CB tombera le long de FE, parceque les angles C et F sont égaux entr'eux. Le point B se trouvera donc placé sur E. Ainsi, les deux triangles coïncideront parfaitement. Donc ils seront égaux dans toutes leurs parties.

THÉORÈME.

44. *Lorsqu'un des trois côtés d'un triangle ABC, tel que AC, est prolongé indéfinement en*

en D, l'angle externe BCD qui en résulte, est toujours plus grand que chacun des deux internes A et B, qui lui sont opposés. (Fig. 13.)

Je dis d'abord qu'il est plus grand que l'angle B, opposé au côté AC prolongé. Pour le prouver, imaginez le côté BC, partagé en deux également en F; tirez la droite indéfinie AFG; faites FG égale à AF, et joignez les deux points C et G par la droite CG.

Vous aurez les deux triangles parfaitement égaux BFA, CFG, en vertu de leur construction (42). Les angles B et BCG seront donc égaux entr'eux. Mais ce dernier est certainement plus petit que BCD, dont il n'est qu'une partie. Donc cet angle externe BCD est aussi plus grand que l'angle interne B, opposé au côté AC.

Je dis de plus que ce même angle externe BCD est aussi plus grand que l'autre interne opposé A. Car en prolongeant le côté BC, on le trouvera égal à ACE, qui lui est opposé au sommet (17). Mais ce dernier est plus grand que l'angle interne A, opposé au côté prolongé, par la démonstration précédente. Ainsi l'angle externe est plus grand que l'autre interne opposé A.

L'angle externe est donc plus grand que chacun des deux internes opposés.

THÉORÈME.

45. *Dans tout triangle qui a deux de ses côtés inégaux entr'eux, les angles opposés*

à ces côtés seront inégaux de même, et le plus grand angle sera constamment opposé au plus grand côté. (Fig. 14.)

Je suppose que dans le triangle ABC le côté BC soit plus grand que le côté AB, J'en conclus que l'angle A doit être plus grand que l'angle C. Pour le prouver, portez AB de B en D. Prolongez de même le côté BA, faites BE égale à BC, et tirez DE. Cette construction vous fournira les deux triangles parfaitement égaux ABC et DBE (42); ainsi vous aurez l'angle BAC égal à l'angle BDC. Mais ce dernier est plus grand que l'angle C, étant l'externe du triangle CDF, dont celui-ci est l'interne (44). Donc l'angle BAC est plus grand que C.

THÉORÈME.

46. *Dans tout triangle isoscèle ABC, les angles A et C, opposés aux côtés égaux BC et BA, sont égaux entr'eux et réciproquement. (Fig.* 10.)

Appliquez à ce cas la construction du théorème précédent. Vous verrez les points D et E tomber sur les points C et A, et les deux triangles coïncider, même dans leur position renversée. Les angles A et C seront donc égaux entr'eux (42).

Réciproquement, les angles A et C étant supposés égaux entr'eux, les deux triangles coïncideront encore dans leur position renversée (43); ainsi les côtés opposés seront égaux entr'eux.

THÉO-

THÉORÈME.

47. *Dans tout triangle qui a deux de ces angles inégaux entr'eux, les côtés opposés seront inégaux de même; et le plus grand côté sera constamment opposé au plus grand angle. (Fig. 14.)*

L'angle A étant supposé plus grand que l'angle C, le côté BC ne sauroit être égal au côté AB, parcequ'alors les angles A et C seroient égaux entr'eux (46). Il ne sauroit être moindre que le côté AB, parcequ'alors l'angle A seroit aussi moindre que l'angle E (45). Reste donc qu'il soit plus grand. Ainsi dans tout triangle, le plus grand côté est constamment opposé au plus grand angle.

THÉORÈME.

48. *Lorsque les deux triangles BAC et BAD ont le côté AB commun entr'eux, les côtés AC et AD égaux, mais les angles compris BAC et BAD inégaux entr'eux, les côtés BC et BD, opposés à ces angles, seront inégaux de même; et le plus grand des deux sera le côté BC, opposé au plus grand angle BAC. (Fig. 15. 16.)*

Il peut y avoir trois cas.

Premier cas. Le point D tombe hors du triangle BAC *(Fig. 15)*. Le triangle DAC étant isoscèle par supposition, les angles ACD et ADC seront égaux entr'eux (46). Le premier est plus grand que BCD, qui n'en est qu'une partie.

tie. L'autre est moindre que BDC, dont il fait partie lui-même. L'angle BDC sera donc plus grand que BCD; et comme ils appartiennent tous les deux au même triangle, le côté BC, opposé au premier, sera plus grand que le côté BD, opposé à l'autre. (45.)

Second cas. Le point D tombe dans le triangle BAC. *(Fig. 16.)* Prolongeant les côtés AC et AD du triangle isoscèle ACD, les angles externes ECD et FDC seront égaux entr'eux (46). Le premier est plus grand que BCD, qui n'en est qu'une partie. L'autre est moindre que BDC, dont il fait partie lui-même. L'angle BDC sera donc plus grand que BCD; et comme ils appartiennent au même triangle, le côté BC, opposé à l'un, sera plus grand que le côté BD, opposé à l'autre. (45).

Troisième cas. Le point D tombe sur le côté même BC. Dans ce cas le côté BD fera partie du côté BC, et sera par conséquent moindre que lui.

THÉORÈME.

49. *Si d'un point quelconque E situé hors d'une droite AF, on mène une perpendiculaire EA à cette droite, de même que plusieurs obliques, telles que EB, EC, ED, parmi lesquelles les deux EB et EC se trouvent de part et d'autre à des distances égales de la perpendiculaire (Fig. 17.):*

a. La perpendiculaire EA sera plus courte que toute oblique, telle que EC.

b.

b. Toute oblique, telle que EC, sera plus courte que toute autre oblique ED, qui s'écarte d'avantage de la perpendiculaire.

c. Les deux obliques EB et EC, menées de part et d'autre à des distances égales de la perpendiculaire, sont égales entr'elles.

a. L'angle ECA, interne du triangle ECA, est moindre que son externe EAB, et par conséquent moindre aussi que EAC, qui par supposition est égal à EAB (44). Ainsi le côté EA, opposé à l'un, sera moindre que le côté EC, opposé à l'autre (47). La perpendiculaire EA sera donc plus courte que toute oblique EC, et comme telle, elle exprimera la véritable distance du point E à la ligne BF.

b. L'angle EDA, interne du triangle EAD, sera moindre que son externe EAB (44.); et par conséquent moindre aussi que EAC, qui lui est égal par supposition. Ce dernier angle, interne du triangle EAC, est moindre que son externe ECD (44). A plus forte raison, l'angle EDA ou EDC sera-t-il moindre que ECD. Ainsi le côté EC, opposé à EDC dans le triangle de ce nom, sera moindre que ED, opposé à l'angle ECD dans le même triangle (45).

c. Les triangles EAC, EAB, ont d'abord le côté AE commun entr'eux. Les angles EAC, EAB, droits dans les deux, sont égaux. Les côtés AC et AB sont égaux par supposition. Les deux triangles EAC, EAB seront donc parfaitement égaux (42), ce qui donne EB = EC.

50. *Corollaire.* Réciproquement, si les obliques EB et EC sont égales entr'elles, elles seront nécessairement à des distances égales de la perpendiculaire AB et AC. Car si ces distances étoient inégales, les obliques EB et EC, seroient inégales de même (49).

On peut remarquer que dans cette dernière supposition, les triangles EAB et EAC seront nécessairement égaux entr'eux.

THÉORÈME.

51. *Lorsque deux points quelconques d'une ligne droite DBE, tels que D et E, se trouvent à égales distances des deux extremités d'une autre ligne AC, de manière qu'on ait DA = DC, et EA = EC, elles seront perpendiculaires l'une sur l'autre, et de plus la ligne AC se trouvera partagée en deux également au point B.* (*Fig.* 17. *b.*)

Les côtés du triangle DAE étant égaux à ceux du triangle DCE par supposition, les angles de l'un seront égaux aux angles de l'autre; vous aurez donc BDA = BDC; et BEA = BEC (41).

L'égalité de ces angles étant démontrée, la comparaison des deux triangles ABD et CBD fera voir, qu'ayant les angles égaux ADB et CBD, compris entre des côtés égaux, savoir: les lignes égales AD et CD, et le coté BD, commun aux deux triangles, ils seront parfaitement égaux (42).

Les

Les angles DBA et DBC seront dont égaux entr'eux; et comme ce sont des angles de suite, chacun d'eux sera un angle droit.

Ensuite les lignes BA et BC seront aussi égales; ainsi AC sera partagée en deux également au point B.

La solution des problêmes suivans peut être regardée comme la conséquence immédiate des notions générales sur les triangles parfaitement égaux, que nous venons d'exposer.

PROBLÊME.

52. *Faire sur une ligne donnée DF, un angle égal à l'angle donné A.* (*Fig.* 18.)

Avec un rayon pris à volonté, décrivez du centre A, l'arc CB, compris entre les côtés de l'angle donné A: et du centre D, l'arc indéfini FE. Portez la distance CB sur FE, de F en E, et tirez DE.

Les trois côtés du triangle BAC étant égaux à ceux du triangle EDF, en vertu de la construction, l'angle D sera égal à l'angle proposé A (41).

PROBLÊME.

53. *Partager en deux également un angle donné BAC.* (*Fig.* 19.)

Faites AB = AC; ensuite, des centres B et C, avec un même rayon pris à volonté, décrivez dans l'ouverture de l'angle donné des arcs de cercle qui se couperont en D. Enfin tirez DA.

Les côtés du triangle ABD étant par construction égaux à ceux du triangle ACD, les angles BAD et CAD seront égaux entr'eux (41).

PRO-

PROBLÊME.

54. *Élever dans le point B de la ligne ABC une perpendiculaire.* (*Fig.* 20.)

Faites AB = BC. Ensuite, des points A et C comme centres, et avec un rayon quelconque, plus grand que AB ou BC, décrivez deux arcs de cercle qui se couperont quelquepart en D. Tirez DB.

Elle sera perpendiculaire à AC, en vertu de 51.

PROBLÊME.

55. *D'un point D hors de la ligne droite AC, abaisser sur cette dernière une perpendiculaire.* (*Fig.* 21.)

Du centre D, et d'un rayon quelconque, mais plus grand que la distance de ce centre à la ligne AC, décrivez l'arc de cercle AGC. Des deux points A et C comme centre, avec un rayon pris à volonté, décrivez deux autres arcs, qui se couperont en E, la ligne DE sera la perpendiculaire demandée, en vertu de 51.

PROBLÊME.

56. *Partager une ligne quelconque AC en deux également, moyennant une perpendiculaire qui la traverse.* (*Fig.* 22.)

Des points A et C comme centres, et d'un rayon pris à volonté, décrivez deux arcs de cercle qui se couperont quelquepart en D. De ces mêmes points comme centres, et d'un rayon pris à volonté (vous pouvez conserver le rayon pris précédemment) décrivez de l'autre côté de AC, deux autres arcs de cercle, qui se couperont en E. Tirez DE.

Cette ligne DE sera perpendiculaire sur AC, et elle partagera AC en deux également au point B, en vertu de 51.

PRO-

PROBLÈME.

57. *Connoissant les trois côtés d'un triangle, ou deux de ses côtés avec l'angle compris, ou deux de ses angles avec le côté compris entr'eux, construire le triangle.* (*Fig.* 11.)

a. Ayant porté sur une ligne indéfinie l'un des trois côtés de D en F, décrivez du centre D, avec un rayon égal au second côté, l'arc de cercle indéfini *mn;* et du centre F, avec un rayon égal au troisième côté, un second arc de cercle *op*, qui rencontrera l'arc *mn* au point F. Tirez les lignes ED, EF; et le problème sera résolu.

b. Ayant fait la ligne DF égale à l'un des deux côtés, faites l'angle D égal à l'angle donné du triangle, et portez l'autre côté de D en E. Tirez EF; et le problème sera résolu.

c. Ayant fait la ligne DF égal au côté donné du triangle, faites l'angle D égal à l'un des deux angles donnés, pour avoir la position du côté DE. Faites ensuite l'angle F égal à l'autre angle donné, pour avoir la position de l'autre côté FE. Le point de rencontre des deux côtés fixera le sommet E du triangle, lequel par conséquent se trouvera construit.

PROBLÈME.

58. *Connoisaat les deux côtés AB et BC d'un triangle, avec l'angle A opposé au côté BC, construire le triangle.* (*Fig.* 22. *b.*)

Ayant tiré la ligne indéfinie AD, faites l'angle A égal à l'angle proposé, afin d'avoir la position de l'un des deux côtés vers la base; et portez ce côté de A en B. Ensuite, du point B comme centre, avec un rayon égal à l'autre des deux côtés donné, décrivez l'arc de cercle indéfini CC′, qui dans les cas où le problème est possible, coupera la ligne AD aux deux points C et C′. Vous aurez les deux triangles ABC et ABC′, qui satisfont également à la

la question ; ayant l'angle A égal à l'angle donné ; le côté AB égal à l'un des deux côtés donnés ; et chacun des deux côtés BC et BC′, opposé à l'angle A, et égal à l'autre.

Le triangle BCC′ étant isoscèle, la somme des deux angles BCA et BC′A, opposés au côté AB dans l'un et dans l'autre des deux triangles, sera égale à deux angles droits. (14. 46.)

Le problème n'est donc déterminé, qu'autant qu'on sera instruit ailleurs, si l'angle opposé au côté AB, est aigu, où s'il est obtus. Le triangle ABC′ dans le premier cas, et le triangle ABC dans le second cas, sera celui du problème.

CHAPITRE TROISIEME.

LES PARALLÈLES.

DÉFINITION.

59. Deux lignes sont dites *parallèles*, lorsque étant situées dans le même plan elles ne peuvent se rencontrer, à telle distance qu'on les prolonge de part et d'autre.

THÉORÈME.

60. *Lorsque la position de deux lignes est telle qu'étant traversées par une troisième, il en resulte aux deux points d'intersection, et du même côté de la transversale les angles égaux A et B, ces deux lignes sont parallèles entr'elles. (Fig. 23.)*

Elles

Elles ne peuvent se rencontrer vers P, parcequ'alors l'angle A, externe du triangle ABP, seroit plus grand que son interne B. *(Fig.* 24.*)*

Elles ne peuvent non plus se rencontrer vers Q, parcequ'alors l'angle B, externe du triangle ABQ, seroit plus grand que l'angle interne C, égal à l'angle A, qui est vertical de C. *(Fig.* 25.*)*

Donc, ne pouvant se rencontrer ni de part ni d'autre, elles doivent être parallèles.

THÉORÈME.

61. *Lorsque deux lignes parallèles sont traversées par une troisième, les angles* A et B *formés aux deux points d'intersection, et situés du même côté de la transversale, seront égaux entr'eux. (Fig.* 23.*)*

Il est visible que du point A on ne peut mener qu'une seule ligne, qui soit parallèle à BR. De ce même point on ne peut en mener qu'une seule non plus, qui fasse avec la transversale un angle égal à B. Donc, la proposition directe ayant déjà été prouvée, il faut en conclure que les deux propriétés sont inséparables, qu'elles doivent toujours convenir à une même ligne droite, et qu'ainsi la proposition présente, qui est l'inverse de la précédente, est également vraie.

DÉFINITIONS.

62. Lorsque deux lignes parallèles sont traversées par une troisième, et qu'on désigne par

par A, B, C, D les angles qui se forment autour de l'un des deux points l'intersection, et par E, F, G, H ceux qui se forment autour de l'autre ; *(Fig.* 26.*)* alors, combinant ensemble chacun des quatre premiers avec chacun des quatre derniers, il en résulte six combinaisons différentes, savoir :

Prémièrement. Externes internes du même côté ; tels sont les angles A et E ; B et F ; C et G ; D et H.

Sécondement. Externes internes alternes : tels sont les angles A et F ; B et E ; C et H ; D et G.

Troisièmement. Externes du même côté ; tels sont les angles A et G ; B et H.

Quatrièmement. Externes alternes, tels sont les angles A et H, B et G.

Cinquièmement. Internes du même côté : tels sont les angles C et E ; D et F.

Sixièmement. Internes alternes ; tels sont les angles C et F ; D et E.

THÉORÈME.

63. En combinant la proposition qu'on vient de démontrer, avec les anciens théorèmes qui concernent les angles de suite et les angles verticaux (*14 et* 17), on trouve les six proportions suivantes :

Prémièrement. Les angles externes internes du même côté sont égaux entr'eux. C'est la pro-

proposition même de 61, fondamentale des parallèles.

Secondement. Les angles externes internes alternes font ensemble deux droits. C'est ainsi que l'angle A, étant égal à E, doit faire deux angles droits avec F, qui est contigu de E.

Troisièmement. Les angles externes du même côté font ensemble deux angles droits. C'est ainsi que l'angle A, égal à E, doit faire deux angles droits avec G, qui est contigu de E.

Quatrièmement. Les angles externes alternes sont égaux entr'eux. C'est ainsi que l'angle A, égal à E, doit aussi être égal à H, vertical de E.

Cinquièmement. Les angles internes du même côté font ensemble deux angles droits. C'est ainsi que l'angle E, égal à A, doit faire deux droits avec C, qui est contigu de A.

Sixièmement. Les angles internes alternes sont égaux entr'eux. C'est ainsi que l'angle E, égal à A, doit aussi être égal à D, vertical de A.

64. On donnera beaucoup plus de généralité à ces six théorèmes, en les énonçant comme il suit.

THÉORÈME.

65. *Lorsque les deux côtés d'un angle sont parallèles aux deux côtés d'un autre,*

ces angles seront égaux entr'eux, ou leur somme équivaudra à celle de deux angles droits.

Pour distinguer ces deux cas, désignons par A et B les côtés de l'un, par *a* et *b* les côtés de l'autre : de manière que les côtés A et *a* soient parallèles entr'eux, tandis que les côtés B et *b* (*Fig.* 27) le sont l'un à l'autre. Cela étant :

Premièrement. Les deux angles seront égaux entr'eux, lorsque tant les deux côtés A *et* a, *que les côtés* B *et* b, *sont dirigés dans le même sens, en allant du sommet de l'angle vers son ouverture.*

Tels sont les angles P et Q.

Secondement. Les deux angles seront encore égaux, lorsque tant les deux côtés A et a, que les côtés B et b, sont dirigés dans des sens contraires, en allant du sommet vers l'ouverture.

Tels sont les angles P et R, de même que Q et R.

Troisièmement. La somme des deux angles équivaut à celle de deux droits, lorsque les côtés A et a *sont dirigés dans le même sens, tandis que les côtés B et* b *sont dirigés dans des sens opposés.*

Tels sont les angles P et S, Q et S, R et S.

THÉORÈME.

66. *Dans tout triangle ABC, l'angle externe BCD est égal à la somme des deux internes opposés A et B.* (*Fig.* 28.)

Sup-

Supposant CE parallèle à AB, les angles A et ECD, comme externes internes du même côté, seront égaux entr'eux. Les angles B et BCE seront aussi égaux, comme internes alternes. Ainsi la somme des deux angles A et B est égale à tout l'angle externe BCD. Ajoutant à cet externe, le troisième angle du triangle ACB dont il est contigu, il en résulte ce qui suit.

THÉORÈME.

67. *Dans tout triangle rectiligne, la somme des trois angles équivaut à celle de deux angles droits.*

68. *Corollaire* I. Connaissant deux angles d'un triangle, on trouve le troisième, en ôtant leur somme de celle de deux angles droits.

69. *Corollaire* II. Si le triangle est isoscèle, il suffit d'en connoître un seul, pour trouver les deux autres.

70. *Corollaire* III. S'il est équilatéral, chacun de ses trois angles équivaudra aux deux tiers d'un angle droit.

71. *Corollaire* IV. S'il y a un angle droit parmi ses trois angles, la somme des deux autres équivaudra à un angle droit. S'il est de plus isoscèle, chacun de ces deux angles aigus équivaudra à la moitié d'un angle droit.

72. *Corollaire* V. Il ne peut y avoir qu'un seul angle droit dans un triangle quelconque. Et à plus forte raison il ne sauroit y avoir qu'un seul angle obtus.

THÉORÈME.

73. *La somme de tous les angles externes d'un polygone quelconque est égale à celle de quatre angles droits. (Fig. 29.)*

Prenons pour exemple le pentagone ABCDE. Prolongeons-en les côtés tous dans le même sens, pour qu'il en résulte les angles externes A, B, C, D, E. Pour prouver que la somme de ces angles est égale à celle de quatre angles droits, menons d'un point quelconque, des parallèles à tous les côtés du pentagone, toujours dans le sens de leurs prolongemens. Il en résultera autour de ce point, les cinq angles, désignés par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Ces angles doivent être égaux aux angles externes A, B, C, D, E, à cause du parallélisme de leurs côtés respectifs, tous dirigés dans le même sens, en allant du sommet de chaque angle vers son ouverture. Mais les angles *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, en remplissant entièrement l'espace indéfini autour du point qu'on a choisi, font ensemble quatre angles droits (16). Donc la somme des angles externes de ce pentagone, de même que de tout autre polygone équivaut aussi à quatre angles droits.

74. Chaque angle externe fait avec son interne contigu, deux angles de suite, dont la somme équivaut à celle de deux droits. Multipliant la somme constante de deux angles droits par le nombre des côtés du polygone, on aura celle de tous les angles internes et externes ensemble. Et si de ce dernier produit on ôte quatre angles droits, il restera la somme

des

des internes seuls, ce qui donne lieu au théorème suivant.

THÉORÈME.

75. *La somme de tous les angles internes d'un polygone se trouve, en multipliant celle de deux angles droits, par le nombre des côtés moins deux.*

76. *Corollaire* I. La somme de tous les angles internes est donc égale,

à *deux angles droits*, dans le triangle.
à *quatre angles droits*, dans le quadrilatère.
à *six angles droits*, dans le pentagone.
à *huit angles droits*, dans l'hexagone.
à *dix angles droits*, dans l'heptagone.
à *douze angles droits*, dans l'octogone etc. etc.

77. *Corollaire* II. Et si tous les angles internes sont égaux entr'eux, la valeur de chaque angle sera égale, en prenant l'angle droit pour l'unité;

à *deux tiers*, dans le triangle.
à *un entier*, dans le quadrilatère.
à *six cinquièmes*, dans le pentagone.
à *quatre tiers*, dans l'hexagone.
à *trois demi*, dans l'octogone.
à *huit cinquièmes*, dans le décagone.
à *cinq tiers*, dans le dodécagone etc.

DÉFINITION.

78. Dans tout polygone, on appelle *diagonale* la ligne qui est tirée du sommet d'un angle à celui d'un autre non-adjacent.

PRO-

PROBLÈME.

79. *Connoissant le nombre des côtés d'un polygone, trouver celui de ses diagonales.*

De chaque angle du polygone vous pouvez tirer des diagonales à tous les autres, excepté aux deux adjacens, et l'angle lui-même dont vous êtes parti. Mais dans ce nombre de diagonales, que vous obtiendrez en multipliant le nombre des côtés, par le même nombre diminué de trois, chaque diagonale sera comptée deux fois. Donc, en prenant la moitié de ce produit, vous aurez le nombre des diagonales.

80. Le triangle n'a donc aucune diagonale. Le quadrilatère en a *deux*. Le pentagone, *cinq*. L'hexagone, *neuf*. L'heptagone, *quatorze*. L'octogone, *vingt*. Le décagone, *trente-cinq*. Le dodécagone, *cinquante-quatre*.

DÉFINITION.

81. Une figure quadrilatère, dont chaque coté est parallèle au coté opposé, prend le nom de *parallélogramme*. *(Fig.* 30. 31. 32. 33.*)*

THÉORÈME.

82. *Tout parallélogramme aura les trois propriétés suivantes* : 1. *ses angles opposés sont égaux entr'eux.* 2. *ses côtés opposés sont égaux entr'eux.* 3. *ses deux diagonales se partagent en deux également.*

La première partie du théorème est une conséquence naturelle du parallélisme des côtés opposés. *(Fig.* 33.*)*

Pour

Pour prouver la seconde, comparez les deux triangles ADB et DAC. Vous y trouverez la diagonale AD, qui en est la base commune, comprise entre des angles égaux, parcequ'ils sont alternes internes : ce sont d'abord les angles DAB et ADC ; ensuite ADB et DAC. Donc ces triangles étant parfaitement égaux, les côtés opposés aux angles égaux qu'on vient de nommer seront égaux de même ; ainsi vous aurez AB = CD, AC = BD.

Pour prouver la troisième, comparez les deux triangles AEB et DEC. Les angles de l'un sont respectivement égaux aux angles de l'autre, par la même raison. De plus on vient de démontrer l'égalité de leurs bases, AB et CD. Ainsi, ces deux triangles, ayant des bases égales, comprises entre des angles égaux, seront parfaitement égaux entr'eux : ce qui donne AE = DE, BE = CE. Les deux diagonales se couperont donc en deux également.

83. *Corollaire.* Les côtés opposés du rectangle ou quarré long, devant être égaux entr'eux, on en tire la conséquence naturelle que deux lignes parallèles sont partout également distantes. *(Fig.* 31.*)*

DÉFINITIONS.

84. Il existe donc quatre espèces de parallélogrammes, auxquels on a donné les noms qui suivent.

Le *quarre* est un parallélogramme, dont tous les angles sont droits, et dont tous les côtés sont égaux entr'eux. *(Fig.* 30.*)*

Le

Le *rectangle* est un parallélogramme dont les angles sont droits, mais dont les côtés opposés seulement sont égaux entr'eux. *(Fig.* 31.*)*

Le *rhombe* est un parallélogramme dont tous les angles sont obliques, et dont les quatre côtés sont égaux entr'eux. *(Fig.* 32.*)*

Le *rhomboïde* est un parallélogramme dont les angles sont obliques, et dont les côtés opposés seulement sont égaux entr'eux. *(Fig.* 33.*)*

Le *quadrilatère* qui n'a que deux côtés parallèles, prend le nom de *trapèze*. *(Fig.* 34.*)*

On peut appeller *trapèze rectangle* celui dont les deux côtés parallèles sont perpendiculaires sur l'un des deux autres. Il aura donc deux angles droits, et deux obliques.

THÉORÈME.

85. *Dans le quarré et dans le rhombe, les deux diagonales AD et BC sont perpendiculaires l'une à l'autre.* (*Fig.* 30, 32.)

Les deux extrémités B et D de l'une des deux diagonales, se trouvant à des distances égales des deux extrémités A et C de l'autre, à cause de l'égalité des côtés, ce théorème sera entièrement compris dans celui de 51, dont il n'est qu'un cas particulier.

THÉORÈME.

86. *Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont égaux entr'eux, ils seront en même tems parallèles, et le quadrilatère sera un parallélogramme.*

Ce

Ce théorème se prouve par la parfaite égalité des triangles ADB et DAC, qui est une conséquence naturelle de l'égalité des côtés respectifs, que ce théorème suppose.

THÉORÈME.

87. Lorsqu'un des côtés d'un triangle, tel que AB, est divisé en un certain nombre de parties égales aux points C, D, E, F, et que par les points de division on mène des parallèles à un autre de ses côtés, tel que BP, je dis que ces parallèles diviseront le troisième côté du triangle AP en un même nombre de parties égales, aux points L, M, N, O. *(Fig.* 56.*)*

Menez par les points L, M, N, O, les lignes LG, MH, NI, OK parallèles à AB. Il en résultera une suite de parallélogrammes CDGL, DEHM, EFIN, FBKO. Ainsi les lignes AC, LG, MH, NI, OK seront égales entr'elles.

Vous aurez de plus une suite de triangles ACL, LGM, MHN, NIO, OKP, qui seront parfaitement égaux entr'eux, ayant les côtés égaux AC, LG, MH, NI, OK, et de plus des angles égaux, à cause du parallèlisme de leurs côtés respectifs.

Ainsi le côté AP sera divisé en un pareil nombre de parties égales, aux points L, M, N, O.

PROBLÊME.

88. *Connoissant les deux côtés d'un parallélogramme, avec l'angle compris entr'eux, construire le parallélogramme.* (*Fig.* 35.)

So-

Solution.

Sur une ligne indéfinie quelconque, portez l'un des deux côtés du parallélogramme, de C en D. Faites en C un angle égal à l'angle donné du parallélogramme, afin d'avoir la position de l'autre côté CA, et portez de C en A l'autre des deux côtés donnés du parallélogramme. Du centre D, avec le rayon CA décrivez l'arc de cercle *op*; et du centre A avec le rayon CD décrivez un second arc *mn*, qui rencontrera le premier dans un point B. Tirez BA et BD; et le problème sera résolu.

La démonstration est la même que celle des théorèmes précédens.

PROBLÈME.

89. *D'un point A, situé hors de la droite CD, mener une ligne parallèle à cette dernière.*

Solution.

Ce problème est entièrement compris dans le précédent, en prenant à volonté les deux côtés du parallélogramme, de même que l'angle qu'ils comprennent entr'eux.

En pratique il se construit facilement, moyennant une règle et un équerre de bois: solution fondée sur ce que deux lignes sont parallèles, lorsque traversées par une troisième, elles forment avec elles des angles externes internes du même côté, égaux entr'eux.

PROBLÈME.

90. *Diviser une ligne quelconque proposée, telle que AB, en un certain nombre de parties égales.* (*Fig.* 56.)

Solution.

Ayant mené sous un angle quelconque la ligne indéfinie AP, prenez AL à volonté, et portez la au-

autant de fois de suite sur AP, qu'il doit y avoir de parties égales dans AB. Tirez BP, et menez lui des parallèles par les points de division L, M, N, O; savoir LC, MD, NE, OF. Les nouveaux points de division que vous obtiendrez, C, D, E, F, résoudront le problême.

CHAPITRE QUATRIEME.

LE CERCLE.

DÉFINITIONS.

91. *Le cercle* est une figure, décrite dans un même plan, par le mouvement d'une ligne droite autour de l'une de ses deux extrémités.

La ligne courbe, rentrante en elle-même, qui pendant le mouvement de cette ligne, est décrite par chacun de ses points, et qui par conséquent termine l'espace circulaire, est nommée *circonférence de cercle.*

La ligne droite dont le mouvement a produit le cercle, prend le nom de *rayon.*

Celui de ses deux points extrêmes, autour duquel le mouvement a été fait, est appellé *centre du cercle.*

Toute ligne qui passe par le centre, et qui est terminée de part et d'autre à la circonférence, est nommée *diamètre du cercle.*

La ligne courbe (*Fig.* 33.) ATBHG est une circonférence de cercle. Le point C en est le centre.

La

La ligne AB en est un diamètre. Les lignes CA, CT, CB, CG, CH en sont des rayons.

92. Une portion quelconque de circonférence, telle que GIH, est nommée *arc de cercle*. La ligne GH, qui joint les deux extrémités de l'arc, prend le nom de *corde* ou *soûtendante*. Nous nommerons *apothème d'un arc*, la perpendiculaire abaissée du centre sur la corde de cet arc. L'apothème de l'arc GIH sera la droite CO.

93. L'espace compris entre l'arc de cercle GIH, et sa corde GH, est nommé *segment de cercle*. L'espace renfermé entre un arc de cercle GIH, et les deux rayons CG et CH, menés aux deux extrémités de l'arc, prend le nom de *secteur de cercle*.

94. Une ligne quelconque, telle que PQ qui en traversant la circonférence, la rencontre en deux points quelconques, tels que D et E, est nommée *sécante*. Si, au lieu de le rencontrer en deux points, elle ne fait que l'effleurer dans un seul point, de manière, qu'entièrement située hors du cercle, elle ait cependant un seul point de commun avec lui, elle est nommée *tangente du cercle*.

La ligne PQ est une sécante: elle rencontre le cercle aux deux points d'intersection D et E.

La ligne MN en est une tangente; le point T est le point de contact, qu'elle a de commun avec la circonférence.

De ces définitions, on tire immédiatement les conséquences qui suivent.

95. Tous les points d'une circonférence de cercle se trouvent à une même distance de son centre.

96. Tous les rayons d'un même cercle sont égaux entr'eux.

97. Tous les diamètres d'un même cercle sont égaux entr'eux.

98. Le diamètre d'un cercle est le double de son rayon.

99. Tout diamètre divise le cercle et sa circonférence en deux moitiés parfaitement égales.

100. Deux diamètres d'un même cercle, interceptent de part et d'autre des secteurs opposés parfaitement égaux entr'eux.

101. Tout secteur de cercle, tel que CGIH, est composé d'un segment circulaire GIH, et d'un triangle isoscèle GCH.

102. Toute ligne, meuée d'un point de circonférence à l'autre, tombe dans le cercle.

103. Toute corde de cercle est plus petite que le diamètre.

104. Une ligne droite ne peut rencontrer une circonférence de cercle en plus de deux points.

105. Deux cercles, décrits du même centre, avec le même rayon, coïncideront entièrement.

106. Deux cercles, décrits du même centre, mais avec des rayons inégaux, ne peuvent jamais se couper.

107. Deux cercles, qui n'ont pas le même centre, peuvent se couper, mais jamais en plus de deux points.

THÉORÈME.

108. *Deux secteurs de cercle, tels que BAC et EDF (Fig. 18.) décrits avec des rayons égaux AB et DE, et ayant les angles au centre A et D aussi égaux, seront parfaitement égaux entr'eux.*

Essayez de placer le secteur EDF sur le secteur BAC, en mettant le rayon DF sur le rayon AC, qui le couvrira parfaitement, les deux rayons étant égaux entr'eux.

Le rayon DE alors sera couché le long de AB, parceque les angles A et D sont supposés égaux entr'eux.

L'arc FE de son côté tombera sur CB, car ce sera le cas de deux cercles, lesquels, décrits du même centre, et avec des rayons égaux, doivent coïncider.

Ainsi, les deux secteurs circulaires, devant coïncider dans tous leurs points, seront parfaitement égaux entr'eux.

109. *Corollaire* I. On en conclura, que lorsque deux arcs d'un même cercle, ou de cercles égaux, sont égaux entr'eux, leurs angles au centre correspondans seront égaux de même; et réciproquement.

110. *Corollaire* II. Les angles au centre A et D étant égaux entr'eux, il en résultera né-

nécessairement les triangles parfaitement égaux BAC et EDF: ainsi les lignes BC et EF seront aussi égales entr'elles.

111. *Corollaire* III. Donc, les arcs égaux d'un même cercle, ou de deux cercles égaux, auront toujours des cordes égales; et réciproquement, les cordes égales d'un même cercle ou de deux cercles égaux, appartiendront toujours à des arcs égaux entr'eux.

THÉORÈME.

112. *Dans tout cercle, la ligne CFT, qui part du centre, et qui divise en deux également l'arc DTE, est perpendiculaire à la corde FE, et la partagera en deux également.* (*Fig.* 33.)

Les arcs DT et ET étant supposés égaux entr'eux, les cordes DT et ET le seront de même (111). La ligne CT aura donc deux de ses points à égales distances des deux extrémités de la corde DE, savoir C, à cause des rayons égaux CD et CE; et T, à cause des cordes égales DT et ET. Ainsi, se trouvant comprise dans le théorème de 51, elle sera perpendiculaire à la corde DE, et elle la partagera en deux également.

Il est donc prouvé que la ligne qui passe par le centre et par le milieu de l'arc, passera aussi par le milieu de la corde, et sera perpendiculaire à cette corde.

Mais il est visible que 1. du centre C on ne peut mener qu'une seule ligne droite au

au milieu de l'arc DTE. 2. Que de ce même centre on n'en peut mener qu'une seule au milieu de la corde DFE. 3. Que de ce même centre, on n'en peut mener qu'une seule qui soit perpendiculaire à la corde DE.

Donc, comme de ces quatre propriétés, deux quelconques suffisent pour déterminer la position de la ligne CT; et qu'il a été prouvé en 112, que la ligne qui a les deux premières, réunit aussi les deux autres; il faut en conclure que la ligne qui a deux quelconques des quatre propriétés énoncées ci-dessus, les réunit toutes. Il en résulte les six théorèmes qui suivent, et qui n'appartiennent qu'au cercle seul.

THÉORÈME I.

113. La ligne qui passe par le centre et par le milieu de l'arc, passera aussi par le milieu de la corde, et sera perpendiculaire à la corde.

THÉORÈME II.

114. La ligne qui passe par le centre et par le milieu de la corde, passera aussi par le milieu de l'arc, et sera perpendiculaire à la corde.

THÉORÈME III.

115. La ligne qui passant par le centre, est perpendiculaire à la corde, partagera en deux également la corde, de même que l'arc qu'elle soûtend.

THÉO-

THÉORÈME IV.

116. La ligne qui est perpendiculaire à la corde dans son milieu, passera par le centre, et partagera l'arc en deux également.

THÉORÈME V.

117. La ligne qui du milieu de l'arc est abaissée perpendiculairement sur la corde, la partage en deux également; et prolongée, elle passe par le centre.

THÉORÈME VI.

118. La ligne qui partage également en deux, l'arc et la corde qui la soûtend, est perpendiculaire à la corde, et suffisamment prolongée, elle passe par le centre.

119. La démonstration des six théorèmes précédens ne dépend pas de la distance CF de la sécante PQ au centre; elle est également générale, quelque soit cette distance. Il est visible, que plus la corde s'écartera du centre, en conservant sa position parallèle au diamètre AB, plus aussi sa partie DE, interceptée entre les deux points d'intersection D et E, deviendra petite; l'arc DTE qu'elle soûtend, décroîtra avec elle, et les théorèmes que nous avons démontrés, continueront d'avoir lieu.

120. Enfin cette sécante PQ pourra tellement s'éloigner du centre, que parvenue dans la position MTN, et entièrement située hors de la circonférence, elle ne fera plus que de l'effleurer dans un seul point T. Dans cette position,

elle deviendra *tangente* du cercle en T; dans ce même point seront confondus l'arc entier DTE, de même que la corde DFE, qui le soûtend; et il faudra substituer *le point de contact* T, à ce que nous avions appellé jusqu'ici, milieu de l'arc, et milieu de la corde. Dans ce cas particulier, nous aurons au lieu des six théorèmes précédens, les trois théorèmes qui suivent.

THÉORÈME I.

121. La ligne CT, qui du centre C est abaissée perpendiculairement à la tangente MTN, passera par le point de contact T, et déterminera la position de ce point.

THÉORÈME II.

122. La perpendiculaire MT, élevée au rayon CT dans son extrémité T, sera tangente du cercle.

THÉORÈME III.

123. La ligne TC, perpendiculaire à la tangente MTN dans le point même de contact T, passera par le centre.

On a vu en 49, que de toutes les droites, qui partant d'un même point quelconque, aboutissent aux différens points d'une autre ligne droite, la plus courte est la perpendiculaire.

Ici on voit que de toutes les lignes qui partent du centre C, et qui aboutissent aux différens points de la tangente MN, la plus courte est certainement celle qui mène au point de contact T. Car celle-ci est égale au rayon CT seul; tandis que toute autre, telle

telle que CKI, auroit outre le rayon CK, la partie KI, interceptée entre la tangente et la circonférence. (*Fig.* 34.)

Donc, le rayon CT doit être perpendiculaire à la tangente MN, au point même de contact.

La tangente n'a proprement qu'un seul point de commun avec la circonférence ; mais elle en approche, et s'en écarte ensuite d'une manière si peu sensible, que sans la perpendiculaire CT il ne seroit pas possible de déterminer la position du point de contact.

C'est ici le premier exemple du fameux problême des tangentes. Dans le cercle, il est accessible à la Géométrie ordinaire. Dans toute autre courbe, différente du cercle, il présente des difficultés bien plus grandes, et il exige des secours d'analyse plus relevés.

THÉORÈME.

124. *Les arcs d'un même cercle, tels que DG et EH, interceptés entre les cordes parallèles DE et GH, sont égaux entr'eux. (Fig* 35.)

La direction parallèle des cordes DE et GH permettra de tirer le rayon CT, perpendiculaire à l'une et à l'autre. Donc, ayant d'un côté les arcs égaux DT et ET, de l'autre les arcs égaux GT et HT (115), les différences seront égales de part et d'autre, ce qui donne DG = EH.

THÉORÈME.

125. *Lorsque deux cercles se coupent réciproquement, la ligne AB qui joint les deux centres, est perpendiculaire à la corde LN qui réunit les deux points d'intersection L et N; et de plus elle partage en deux également cette*

corde LN, de même que les deux arcs LCN et LEN. (Fig. 36.)

Les deux centres A et B, se trouvant naturellement à distances égales des deux points d'intersection L et N, ce théorème est entièrement compris sous celui de 51, et n'a besoin d'aucune démonstration ultérieure.

THÉORÈME.

126. *Lorsque la ligne qui joint les centres de deux cercles, est égale à la somme ou à la différence de leurs rayons, ils se toucheront réciproquement. Le contact dans le premier cas, sera en dehors; et en dedans, si le second cas a lieu. Dans les deux cas, cette même ligne qui joint leurs centres, passera aussi par le point de contact, et elle sera perpendiculaire à la tangente qui dans ce même point est commune aux deux cercles. (Fig. 37.)*

Deux cercles qui se touchent, ne présentent réellement qu'un cas particulier de deux cercles qui se coupent. Ces derniers présentent deux points d'intersection L et N, à une certaine distance l'une de l'autre, lesquels dans le cas d'attouchement, seront confondus dans un seul point de contact, sans que la position de la sécante LN qui les réunit, et qui deviendra tangente alors, cesse d'être perpendiculaire à la ligne AB qui joint les deux centres.

Supposons que, les deux centres A et B restant les mêmes (*Fig.* 36.), le rayon AE de l'un des deux cercles diminue successivement, et

et devienne enfin AC, nous aurons l'exemple de deux cercles qui se touchent au dehors. L'espace entier compris entre les deux arcs LCN et LEN, s'évanouira alors, et sera *point de contact;* la sécante PQ deviendra *tangente,* et restera perpendiculaire à la ligne des centres.

Supposons ensuite, que les deux centres A et B *(Fig.* 36.*)* restant les mêmes, le rayon du premier s'aggrandisse jusqu'au-delà du centre B du second, les points d'intersection L et N, devenant alors L′ et N′; et qu'enfin, son rayon devenant égal à AC′, le premier cercle embrasse entièrement le second, vous aurez l'exemple de deux cercles qui se touchent au dedans, savoir en C′. L'espace entier, compris entre la corde L′D′N′ et les deux arcs L′E′N′ et L′C′N′, s'évanouira alors, et deviendra point de contact D′ *(Fig.* 37.*);* la sécante P′Q′ deviendra tangente commune des deux cercles en D′, et restera perpendiculaire à la ligne des centres.

Le théorème présent est donc entièrement compris dans le précédent, dont il présente un cas particulier.

127. Si la même ligne ADBD′ *(Fig.* 37.*)* étoit celle des centres de plusieurs circonférences de cercle, passant toutes par un des deux points D ou D′, elles s'y toucheroient réciproquement, et de plus elles auroient dans le point de contact une tangente commune, perpendiculaire à la ligne des centres.

THÉO-

THÉORÈME.

128. *Dans un même cercle, les angles au centre sont entr'eux dans le rapport des arcs compris entre leurs côtés ; et réciproquement.*

On a vu (108) que lorsque deux arcs d'un même cercle sont égaux entr'eux, leurs angles au centre correspondans sont égaux de même. Il s'ensuivra que lorsqu'un arc de cercle est double, triple etc. de l'autre, l'angle au centre correspondant au premier sera aussi double, triple etc. de celui qui répond à l'autre: et qu'en général le rapport qui est entre deux angles au centre, est aussi celui des arcs compris entre leurs côtés.

129. Dans les notions préliminaires, (21) nous avons déjà établi pour principe qu'un angle quelconque est à l'angle droit, comme l'arc de cercle, décrit de son sommet comme centre et compris entre ses côtés, est au quart de circonférence. Donc le quart de circonférence étant la mesure naturelle de l'angle droit, on en conclurra que celle de tout angle au centre est l'arc de cercle compris entre ses côtés.

THÉORÈME.

130. *Tout angle à la circonférence, tel que ABC, c'est-à-dire, dont le sommet B se trouve sur la circonférence du cercle, a pour mesure la moitié de l'arc AC, compris entre ses cotés (Fig. 38.)*

Il y a trois cas.

Pre-

Premier cas. Le centre du cercle est sur un des côtés de l'angle à la circonférence ABI. Dans ce cas, ayant mené par le centre D la ligne FDG, parallèle à AB, on aura à la place de l'angle ABI, son égal BDF ou IDG (63), lesquels, comme angles au centre, auront pour mesure l'arc GI ou bien BF, compris entre leurs côtés (129). Ce dernier est égal à AG, compris entre les mêmes cordes parallèles (124). Ainsi, ayant AG=GI, l'angle proposé ABI aura pour mesure la moitié de l'arc AI, compris entre ses côtés.

Second cas. Le centre du cercle D est dans l'angle proposé ABC. Dans ce cas, menant le diamètre BDI, cet angle sera la somme des deux angles à la circonférence ABI et CBI. Ces angles seront tous les deux dans le premier cas: ils auront pour mesure les moitiés des deux Arcs AI et CI. Ainsi l'angle proposé ABC aura pour mesure la moitié de la somme des deux arcs, c'est-à-dire, celle de l'arc AC, compris entre ses côtés.

Troisième cas. Le centre du cercle D est hors de l'angle proposé ABC. Dans ce cas, menant le diamètre BDI, cet angle sera la différence des deux angles à la circonférence ABI et CBI. Ces derniers seront dans le premier cas: ils auront pour mesure les moitiés des deux arcs AI et CI. Ainsi l'angle proposé ABC aura pour mesure la moitié de la différence des deux arcs AI et CI, savoir celle de l'arc AC, compris entre ses côtés. (*Fig.* 44.)

Ce

Ce théorème est fertile en conséquences, viennent des cas particuliers, auxquels on l'appliquer.

131. *Corollaire I.* Tous les angles à circonférence, tels que B, C, D, E, F, qui le même arc compris entre leurs côtés, s égaux entr'eux. (*Fig.* 39.)

132. *Corollaire II.* Tout angle inscrit d le demi-cercle, tel que ABC, est un an droit. (*Fig.* 40.)

133. *Corollaire III.* Tout angle ins dans un segment plus grand que le demi-cer tel que DBF, est aigu. Tout angle ins dans un segment, moindre que le demi-cer tel que DEF, est obtus. (*Fig.* 40.)

134. *Corollaire IV.* Les angles oppc d'un quadrilatère inscrit au cercle, tels DBF et DEF, ou BDE et BFE, valent ensem deux angles droits. (*Fig.* 40.)

135. *Corollaire V.* Tout angle à la conférence, formé par une corde AB et tangente BC, a pour mesure la moitié de l BEA, compris entre ses côtés. (*Fig.* 41.)

Car élevant dans le point de contact B la pendiculaire BD, qui nécessairement sera diamè vous aurez les deux angles à la circonférence D ABC, faisant ensemble un angle droit. Or, le mier ayant pour mesure la moitié de l'arc DA faudra bien que la mesure de l'autre soit la mc du reste du demi-cercle, ou de l'arc AEB.

136. *Corollaire VI.* Tout angle dont sommet est entre le centre et la circonférer te

tel que ABC, a pour mesure la moitié de la somme des deux arcs AC et DF, compris entre ses côtés. *(Fig. 42.)*

Car ayant mené la corde DE, parallèle à BC, vous aurez l'angle à la circonférence ADE, égal à l'angle proposé ABC(63), et ayant pour mesure la moitié de l'arc ACE (130), lequel équivaut à la somme des deux arcs AC et DF, à cause de l'égalité entre l'arc FD et l'arc CE (124).

137. *Corollaire VII.* L'angle ABC, formé par deux sécantes qui se rencontrent au dehors de la circonférence, a pour mesure la moitié de la différence des deux arcs AC et DF, compris entre ses côtés. *(Fig. 43.)*

Car ayant mené la corde DE, parallèle à FC, vous aurez l'angle à la circonférence ADE, égal à l'angle proposé ABC, et ayant pour mesure la moitié de l'arc AE, c'est-à-dire, la moitié de la différence des deux arcs AC et DF, à cause des deux arcs CE et DF, que nous savons être égaux entr'eux.

138. *Corollaire VIII.* L'angle ABG, formé par une sécante et une tangente qui se rencontrent hors du cercle, a aussi pour mesure la moitié de la différence des deux arcs AFG et ACG, compris entre ses côtés.

Ce corollaire ne présente qu'un cas particulier du précédent. La sécante BCF venant à s'écarter du centre, en tournant autour de B, les deux points d'intersection C et F se rapprocheront, et finiront par coïncider dans le point de contact G, au moment où cette ligne, de sécante qu'elle étoit, deviendra tangente.

PRO-

PROBLÊME.

139. *Faire passer une circonférence de cercle par trois points A, B, C, donnés de position.* (*Fig* 45.)

Ayant mené les droites AB, BC, partagez les en deux également par les deux perpendiculaires indéfinies DE, FG (56). Le point d'intersection I de ces deux lignes sera le centre du cercle demandé.

Car l'une et l'autre de ces deux perpendiculaires doit passer par le centre du cercle (116). Ce centre sera donc le point d'intersection, commun aux deux perpendiculaires.

Si les trois points A, B, C étoient en ligne droite, les deux perpendiculaires deviendroient parallèles entr'elles, et ne se rencontreroient nulle part. Dans ce seul cas, la solution du problême deviendroit impossible.

PROBLÊME.

140. *D'un point quelconque A, situé hors d'un cercle, mener une tangente à sa circonférence.* (*Fig.*46.)

Ayant mené de ce point au centre la ligne droite AC, menez la circonférence de cercle, dont cette ligne est le diamètre. Les deux lignes AD, AE, menées de A aux points d'intersection communs des deux cercles, seront tangentes du cercle proposé.

Car les angles ADC, AEC, se trouvant chacun inscrits dans un demi-cercle, seront des angles droits (132). Ainsi, les lignes AD, AE, étant chacune perpendiculaire au rayon dans son extrémité, seront tangentes du cercle proposé (122).

PROBLÊME.

141. *Inscrire un cercle dans un triangle donné ABC.* (*Fig.* 47.)

Partagez en deux également deux angles du triangle, tels que A et C, par les lignes AI, CI (53).

Le

Le point d'intersection I des deux lignes sera le centre du cercle demandé.

Car abaissant les trois perpendiculaires ID, IE, IF, vous aurez les triangles AFI, AEI ; de même que CDI, CEI, parfaitement égaux entr'eux, à cause de l'égalité de tous leurs angles respectifs, et des côtés communs AI, CI. Donc, les trois perpendiculaires étant égales entr'elles, le point I sera le centre du cercle inscrit.

Il est visible qu'en menant de I la ligne IB au troisième angle du triangle, elle le partagera en deux également.

PROBLÊME.

142. *Sur une droite donnée AB construire un arc de cercle AGB, tel qu'il en résulte des angles à la circonférence, égaux à un angle donné.* (*Fig.* 48.)

Faites l'angle CAB égal *au complément* de l'angle donné, c'est-à-dire, à ce qu'il faut lui ajouter pour le rendre égal à un angle droit ; élévez la perpendiculaire BC, et partagez AC en deux également au point D, qui sera le centre du cercle demandé.

Car l'angle CAB ayant été fait égal au complément de l'angle donné, l'angle BCA, qui avec CAB fait un angle droit (71), sera égal à l'angle donné. Il doit en être de même de tous les angles qui ayant leurs sommets sur la circonférence de ce cercle, auront l'arc AB compris entre leurs côtés (131). Ainsi le problême sera résolu.

PROBLÊME.

143. *Connoissant la position des trois points A, B, C, et de plus, les angles AOB, BOC, déterminer la position du point O.* (*Fig.* 49.)

Sur les droites AB et BC décrivez les arcs de cercle AOB, BOC, dans lesquels on puisse inscrire

écrire les deux angles proposés, conformément au problême précédent. Ils se couperont en deux points, dont l'un sera le point donné B, et dont l'autre O sera celui que vous cherchiez.

CHAPITRE CINQUIEME.

LA MESURE DES SURFACES.

144. Pour mesurer des surfaces, il faut les rapporter à quelque surface qu'on suppose connue. On a choisi le quarré de préférence aux autres, parceque dans chacun de ses angles, qui tous sont droits, il présente l'unité angulaire à laquelle tous les angles sont rapportés. Donc, ayant pris une ligne connue pour unité linéaire, le quarré de cette ligne sera l'unité de surface.

THÉORÈME.

145. *Tout rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur. (Fig. 45.)*

La ligne AB étant prise pour unité linéaire, le quarré ABCD sera l'unité de surface. Or, on voit par l'inspection de la figure, que le rectangle AEFG contient autant de ces quarrés qu'il y a d'unités dans le produit qui résulte, en multipliant le nombre des unités linéaires que contient la longueur AE du rectangle, par le nombre des unités que contient sa largeur AG.

On peut donc dire que la surface de tout rectangle est égale au produit de sa base par la hauteur. Seulement il faut remarquer, que le terme de *produit* n'a pas alors absolument le sens ordinaire, en-

enseigné dans les Élémens d'Arithmétique. Là, ce sont presque toujours des quantités de différentes espèces qu'on multiplie ensemble: et on prend l'un des facteurs autant de fois, que l'unité est contenue dans l'autre. Le produit est donc toujours de même espèce avec l'un des deux facteurs: tandis que l'autre est de même espèce avec l'unité. Ici, les deux facteurs sont de même espèce, et l'unité du produit est très-différente de celle de chacun des deux facteurs. Ainsi, en disant que la surface du rectangle est égale au produit des deux côtés, on employe une expression impropre, mais admissible cependant, en observant que l'unité de ce produit est le quarré de l'unité linéaire, employée pour déterminer les deux facteurs.

THÉORÈME.

146. *Le triangle est égal à la moitié du rectangle de même base et de même hauteur.*

Il y a trois cas.

Premier cas. Le triangle est rectangle. Tel est le triangle ADB. Il est visiblement la moitié du rectangle ADBE, de même base et de même hauteur. (*Fig.* 46.)

Second cas. La perpendiculaire abaissée du sommet sur la base, tombe dans le triangle. Tel est le triangle ABC. Un tel triangle est la somme des deux triangles rectangles BDA et BDC. Le premier est la moitié du rectangle AEBD, l'autre est la moitié du rectangle CFBD, ayant l'un et l'autre la même hauteur que le triangle. Ainsi le triangle entier ABC est aussi la moitié du rectangle entier AEFC, de même base et de même hauteur. (*Fig.* 46.)

Troi-

Troisième cas. La perpendiculaire, abais du sommet sur la base, tombe hors du triang Tel est le triangle ABC. Un tel triangle (la différence des deux triangles BDA et BD Le premier est la moïtié du rectangle AEBI l'autre est la moitié du rectangle CFBD, aya l'un et l'autre la même hauteur que le tı angle. Le triangle ABC est donc encore moitié du rectangle, de même base et (même hauteur. *(Fig.* 47.)

147. Tout triangle est donc égal à la mc tié du produit de sa base par sa hauteur.

148. Deux triangles, ayant même ba ou des bases égales, et compris entre l mêmes parallèles, sont égaux en surface.

149. Toute figure rectiligne est toujou décomposable en triangles. Le théorème su fit donc pour déterminer la surface de tou figure rectiligne.

THÉORÈME.

150. *Deux parallélogrammes, ayant mên base ou des bases égales, et compris entre l mêmes parallèles, sont égaux en surface.*

Comme tout parallélogramme est toujou divisible par sa diagonale en deux triangl parfaitement égaux, et que par conséque il est toujours le double de chacun de ceux-(ce théorème peut être regardé comme u conséquence immédiate du précédent. Cepe dant voilà comment il peut être démontr indépendamment de l'autre.

Les

Les parallélogrammes AEFC et AGHC *(Fig. 48.)* ayant la même base AC, et se trouvant compris entre les mêmes parallèles AC et EH, vous aurez les deux triangles parfaitement égaux AEG et CFH. Retranchez en la partie commune IFG, il restera les deux trapèzes égaux AEFI et CIGH. Ajoutez à l'un et à l'autre le triangle commun ACI, il en résultera les parallélogrammes égaux AEFC et AGHC. Ce sont précisément ceux du théorème.

THÉORÈME.

151. *La surface d'un trapèze ABCD se trouve, en multipliant la somme des deux bases parallèles AD et BC par la hauteur du trapèze EF, et en prenant la moitié du produit. (Fig. 49.)*

Le trapèze est la somme des deux triangles ABD, BDC, de la même hauteur que le trapèze; ayant pour bases, l'un le côté AD, l'autre le côté BC. On trouve la surface de l'un et de l'autre, en prenant la moitié du produit de la hauteur commune EF par la base qui appartient à chacun d'eux. Leur somme sera donc égale à la moitié du produit de la somme des deux bases par leur hauteur commune, qui est celle du trapèze.

THÉORÈME.

152. *Deux parallélogrammes, ou deux triangles, ayant des bases inégales, et compris entre les mêmes parallèles ou ayant la même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases.*

Ils

Ils sont rigoureusement entr'eux comm les produits de leurs bases par leur hauteu commune. Or le rapport de deux produit ne change pas, lorsqu'on les divise par un même quantité quelconque. Ainsi, divisan les deux produits par la hauteur commune les deux parallélogrammes ou triangles seron entr'eux comme leurs bases.

PROBLÊME.

153. *Diviser un parallélogramme, tel que ABCD, en deux trapèzes parfaitement égaux, moyennant une ligne qui passe par un point donné E.* (*Fig.* 50.)

Menez de ce point E une ligne droite, dirigée vers le point d'intersection des deux diagonales I.

Les trapèzes AFGC, DGFB, seront non-seulement égaux, mais parfaitement égaux entr'eux.

PROBLÊME.

154. *Diviser un trapèze en un nombre quelconque de trapèzes égaux.* (*Fig.* 51.)

Divisez chacun des côtés parallèles AE et FK, dans le nombre de parties égales, qui est prescrit par le problême. Joignez les points de division par les lignes BG, CH, DI; le problême sera résolu.

Les trapèzes qui résultent de cette division, ayant tous la même hauteur, et des bases égales, seront égaux en surface.

PROBLÊME.

155. *Diviser un triangle quelconque en un nombre quelconque de triangles égaux.* (*Fig.* 52.)

Divisez dans le nombre prescrit de parties, la base du triangle AE, et joignez les points de division

sion B, C, D, au sommet du triangle, par les lignes BF, CF, DF. Le problême sera résolu.

PROBLÊME.

156. *Changer le triangle ABC en un autre de surface égale, établi sur la base AC, prolongée s'il le faut, et ayant son sommet dans un point D, qui se trouve sur le côté BC.* (*Fig.* 53.)

Tirez DC; menez par B la ligne BE, parallèle à DC, et joignez DE. Le triangle ADE sera le triangle demandé.

Car les triangles BDE, ECD, ayant la même base, et compris entre les mêmes parallèles, sont égaux en surface (148). Ajoutez à tous les deux le triangle ADC; il en résultera les triangles égaux ABC, ADE.

PROBLÊME.

157. *Changer un polygone quelconque ABCDEF en un triangle de surface égale, qui ait son sommet en un point G, situé sur la circonférence du polygone.* (*Fig.* 54.)

Prolongez indéfiniment les côtés du polygone, AF vers L, FE vers K, ED vers I, DC vers H etc.

Du point G menez aux angles F, E, D, C etc. les diagonales GF, GE, GD, GC etc.

De B tirez BH, parallèle à la première diagonale GC, jusqu'au prolongement du côté DCH. De H tirez HI, parallèle à la seconde diagonale GD, jusqu'au prolongement du côté DE. De I tirez IK, parallèle à la troisième diagonale GE, jusqu'au prolongement du côté FE. De K tirez KL, parallèle à la quatrième diagonale, jusqu'au prolongement du côté AF.

Je dis que les polygones suivans ABCDEF (polygone proposé), AGHDEF, AGIEF, AGKF, et AGL (triangle qu'on demandoit), sont égaux en surface.

Car les triangles GBC, GHC, ayant la même base, et compris entre les mêmes parallèles, seront égaux en surface. Ajoutez leur le polygone commun AGCDEF, vous aurez les deux polygones égaux AGBCDEF et AGHDEF.

Les triangles GHD, GID, ayant la même base, et compris entre les mêmes parallèles, sont égaux en surface. Ajoutez leur le polygone commun AGDEF, vous aurez les deux polygones égaux AGHDEF et AGIEF.

Les triangles GIE et GKE, ayant la même base, et compris entre les mêmes parallèles, sont égaux en surface. Ajoutez leur le polygone commun AGEF, vous aurez les polygones égaux AGIEF et AGKF.

Enfin, les triangles GKF et GLF seront égaux en surface. Ajoutez leur le triangle commun AGF, vous aurez le polygone AGKF, égal au triangle AGL, lequel par conséquent sera équivalent aux polygones de la série précédente, dont le premier a été le polygone proposé ABCDEF.

PROBLÈME.

158. *Un polygone quelconque ABCDEFG étant proposé, on veut le diviser en un certain nombre de parties égales, par des lignes menées d'un point H, situé sur la circonférence du polygone.* (*Fig.* 55.)

Commencez par transformer le polygone en un triangle de surface égale AHT, moyennant le contour BTTTTT, composé de lignes parallèles successivement aux diagonales du polygone, de même que dans la solution précédente.

Divisez la base de ce triangle AT en autant de parties qu'il aura été demandé, aux points P, Q, R, S.

De chacun de ces points, menez une suite de parallèles aux mêmes diagonales du polygone, chacune jusqu'au prolongement du côté voisin.

Les

Les points de la circonférence du polygone où ces contours composés de lignes parallèles entr'elles et aux diagonales du polygone aboutiront, et qui sont ici les points P, Q′, R‴, S⁗, sont les points de division. En les joignant tous au point H, le problême sera résolu.

La démonstration de cette solution est comprise dans celle du problême précédent.

CHAPITRE SIXIEME.

LES TRIANGLES SEMBLABLES.

159. L'idée de deux ou de plusieurs rapports égaux entr'eux, fait naturellement naître celle de la ressemblance. Deux contours, deux figures, deux corps sont semblables entr'eux, lorsqu'il existe par tout le même rapport entre celles de leurs parties, qui ont la même position par rapport au tout.

THÉORÈME.

160. *Toute ligne DE, menée parallèlement à un des trois côtés d'un triangle quelconque ABC, tel que le coté BC, divise les deux autres cotés AB et AC en parties proportionnelles; de manière qu'on a* $AD:BD = AE:CE$. *(Fig.* 57.)

PRÉMIÈRE DÉMONSTRATION.

Le théorème peut être regardé comme un corollaire très simple de celui de 87. Quelque soit le rapport AD : DB, il faut bien qu'on puisse l'exprimer par des nombres: ainsi,

supposant AD : DB comme *onze* est à *huit*, cela veut dire que si l'on divisoit le côté AB entier en *dix-neuf* parties égales, AD seroit égale à *onze* de ces parties, et DB contiendroit les *huit* parties qui restent. Ensuite, de tous les points de division, menons des lignes parallèles au côté BC. Conformément à 87, ces lignes diviseront le côté AC en *dix-neuf* parties égales, dont *onze* tomberont sur AE, et *huit* sur CE. Le rapport AE : CE sera donc aussi celui de 11 : 8. Et généralement, quelques nombres qu'on veuille employer, les lignes AD et AE, de même que BD et CE seront équimultiples de l'unité qu'on aura employée ; il en résultera donc AD : BD = AE : CE. *(Fig. 57.)*

On a objecté que cette démonstration n'est admissible que dans les cas où les rapports AD : BD, et AE : CE peuvent être exprimés en nombres entiers, et qu'elle excluoit à jamais les quantités *incommensurables*. On peut répondre que si le rapport entre deux quantités incommensurables ne peut pas être exprimé par de *certains* nombres entiers, l'erreur qui en résulte, peut être diminué à volonté en prenant des nombres plus grands, et que par ce moyen très-simple elle peut être rendue moindre qu'une quantité assignable *quelconque*. Une erreur, qu'on est libre de supposer *aussi petite qu'on veut*, est *nulle dans le fait ;* et deux quantités doivent être réputées égales, lorsqu'il est permis de supposer égale à *zéro*, la différence qui existe entr'elles. Cependant si cette démonstration, quoiqu'aussi rigoureuse qu'aucune démonstration de Géométrie, paroissoit encore laisser quelque doute, voilà celle qui se trouve dans le sixième livre des *Élémens d'Euclide :* elle est entièrement exempte de toute apparence d'incertitude.

SE-

SECONDE DÉMONSTRATION.

Menez les lignes BE et CD. Les deux triangles, égaux en hauteur, ADE et CDE, sont entr'eux dans le rapport de leurs bases, AE et CE (152). De même les deux triangles, égaux en hauteur, AED et BED, sont aussi entr'eux dans le rapport de leurs bases AD et BD (152). Mais les triangles CED et BDE, compris entre les mêmes parallèles et ayant la même base, sont égaux entr'eux (148). Le rapport des deux triangles ADE et CDE étant donc identiquement le même que celui des deux triangles AED et BED, on aura AE:CE=AD:BD.

161. *Corollaire.* Les deux côtés indéfinis AB et AC de l'angle A, étant traversés par un nombre quelconque de lignes parallèles entr'elles, telles que BC, DE, FG, HI etc. il y aura un même rapport constant entre deux segmens quelconques, pris sur l'un et sur l'autre des deux côtés, et compris entre les mêmes parallèles. Ainsi tout les rapports qui suivent, seront égaux entr'eux: BD:CE, DF:EG, FH:GI, AH:AI; de même que BF:CG, BH:CI, DH:EI, AB:AC, AD:AE, AF:AG, etc. *(Fig. 58.)*

Ces derniers se dérivent facilement des premiers, en appliquant le théorème démontré dans l'arithmétique, que s'il y a une suite quelconque de rapports égaux entr'eux, la somme des antécédens sera à la somme des conséquens, et la différence des antécédens à la différence des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

THÉO-

THÉORÈME.

162. *Si les côtés AB et AC d'un triangle ABC sont divisés proportionnellement par la ligne DE, de manière qu'il en résulte la proportion AD:BD = AE:CE, la ligne DE sera parallèle à la base BC du triangle.* (*Fig.* 57.)

Cette proposition est l'inverse de la précédente. On conviendra que d'un point donné l'on ne peut mener qu'une seule parallèle à la base BC. De ce même point, on ne peut en mener qu'une seule non plus, qui partage le côté AC dans un rapport déterminé. Donc, la proposition directe étant déjà prouvée, il faut en conclure, que ces deux propriétés, inséparables l'une de l'autre, doivent nécessairement appartenir à la même ligne droite; et qu'ainsi la proposition présente, inverse de la précédente, doit être également générale.

THÉORÈME.

163. *Lorsque les trois angles d'un triangle DEF sont égaux aux trois angles d'un autre ABC, les côtés qui leur sont opposés seront proportionnels entr'eux, et les deux triangles seront semblables.* (*Fig.* 59.)

L'égalité des angles A et D permettra d'assigner au triangle DEF la position AGH. Dans cette position, vous aurez les angles égaux AGH *ou* E et ABC; de même que les angles égaux AHG *ou* F et ACB, par supposition. Ainsi les lignes GH et BC sont parallèles entr'elles, ce qui donne AG *ou* DE:AB=AH *ou* DF:AC. (160.)

L'éga-

L'égalité des angles C et F permettra encore d'assigner au triangle DEF la position IKC. Dans cette position, vous aurez les angles égaux IKC *ou* E et ABC; de même que les angles KIC *ou* D et BAC. Ainsi les lignes IK et AB devant être parallèles entr'elles, les côtés AC et BC seront coupés en parties proportionnelles, ce qui donne CI *ou* DF:AC = CK *ou* EF:CB.

Il y aura donc le même rapport entre les côtés des deux triangles, qui sont opposés à leurs angles égaux.

164. *Corollaire* I. Lorsque les trois côtés d'un triangle sont parallèles aux côtés d'un autre, ces deux triangles seront semblables: car les angles de l'un seront égaux à ceux de l'autre. (63. 65.)

Tels sont les triangles ABC, DEF. (*Fig.* 59.)

165. *Corollaire* II. Lorsque les trois côtés d'un triangle sont perpendiculaires sur les trois côtés d'un autre, ils seront encore semblables. Car en faisant faire un quart de conversion à l'un, ses côtés deviendront parallèles aux côtés de l'autre. Les côtés proportionnels seront précisément ceux, dont l'un est perpendiculaire à l'autre.

166. *Corollaire* III. Généralement, lorsque les trois côtés d'un triangle sont également inclinés vers les côtés d'un autre, les triangles seront encore semblables, par la même raison.

167. *Corollaire* IV. Des triangles opposés au sommet, et interceptés entre deux lignes pa-

parallèles, tels que les triangles ABC, DBE, seront semblables. Les lignes AD et CE se couperont en des parties reciproquement proportionnelles; de manière que AB: BC = BD: BE. *(Fig.* 60.)

168. *Corollaire* V. Deux triangles isoscèles, qui ont les angles au sommet égaux entr'eux, ou les angles à la base égaux entr'eux, seront semblables.

169. *Corollaire* VI. Lorsque l'un des deux angles aigus d'un triangle rectangle est égal à l'un des deux angles aigus d'un autre triangle rectangle, ces deux triangles seront aussi semblables entr'eux.

170. *Corollaire* VII. Et par cette dernière raison, si du sommet B de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC, on abaisse une perpendiculaire BD sur l'hypotenuse, il en résultera deux autres triangles rectangles ADB, BDC, qui seront semblables entr'eux et au triangle proposé ABC, et qui par conséquent auront leurs côtés homologues proportionnels entr'eux. *(Fig.* 61.)

THÉORÈME.

171. *La ligne BD, qui partage en deux également un des angles internes d'un triangle ABC, tel que B, divisera le côté opposé AC en des parties proportionnelles aux côtés qui comprennent l'angle B: de manière qu'on ait AD: DC = AB: BC. (Fig.* 62.)

Prolongez le côté AB: faites le prolongement BE égal à BC et tirez CE.

L'angle

L'angle ABC, externe du triangle isoscèle CBE, devant être égal à la somme des deux internes BCE et BEC (66) qui eux-mêmes sont égaux entr'eux (46), vous aurez les quatre angles égaux ABD, DBC, BCE, BEC; d'où il suit que CE sera parallèle à BD (60). Ce parallélisme vous fournira la proportion suivante AD:DC=AB:BE (160); et comme les lignes BC et BE sont égales entr'elles, vous aurez AD:DC = AB:BC, qui est la proportion du théorème.

THÉORÈME.

172. *La ligne BD', qui divise en deux également l'angle externe CBE d'un triangle ABC, rencontre la base AC prolongée dans un point D', dont la position est telle, que ses distances aux deux extrémités de la base sont encore proportionnelles aux côtés qui comprennent l'angle contigu de B: de manière qu'on ait AD':D'C = AB:BC. (Fig. 62).*

Portez BC sur BA de B en E', et tirez CE'. L'angle CBE, externe du triangle isoscèle CBE', devant être égal à la somme des deux internes BCE' et BE'C, qui sont eux-mêmes égaux entr'eux, il en résultera les quatre angles égaux BE'C, BCE', CBD' EBD'; d'où il suit que les lignes CE' et BD' seront parallèles entr'elles. On en tire la proportion AD':D'C = AB:BE'; et comme les lignes BC et BE' sont égales entr'elles, vous aurez AD':D'C = AB:BC; ce qui est encore la proportion du théorème.

THÉO-

THÉORÈME.

173. *Lorsque deux triangles ont un angle égal compris entre des côtés proportionnels, ils sont semblables.*

Je suppose que dans les triangles ABC et DEF, les angles A et D soient égaux, et qu'il y ait de plus AB:AC = DE:DF. J'en conclus que les triangles sont semblables. *(Fig.* 59.)

L'égalité des angles A et D permettra de transporter le triangle DEF en AGH. Dans cette position, vous aurez la proportion AB:AC = AG:AH. Vous en conclurrez que les deux lignes BC et GH sont parallèles entr'elles. Delà il résultera l'égalité des angles externes internes du même côté; ainsi les angles AGH, B et E seront égaux entr'eux, de même que les angles AHG, C et F. Donc les triangles seront semblables.

THÉORÈME.

174. *Deux triangles ABC, DEF sont semblables, lorsqu'il existe un rapport constant entre chaque côté de l'un, et le côté homologue de l'autre. (Fig.* 59.)

Je suppose que dans les deux triangles ABC, DEF, les rapports AB:DE, AC:DF, BC:EF sont égaux entr'eux. J'en conclus que les deux triangles sont semblables.

Faites AG=DE; et AH=DF; et tirez GH. De la proportion AG : AB=AH : AC vous conclurez que les lignes BC et GH sont parallèles (162); et qu'ainsi les triangles AGH et ABC seront sem-

semblables entr'eux (164). Cette ressemblance donne la proportion:

$$AB : AG = BC : GH,$$
$$\text{ou } AB : DE = BC : GH.$$

Mais vous avez par supposition:

$$AB : DE = BC : EF.$$

Ainsi les lignes GH et EF, étant chacune le quatrième terme de la même proportion, seront égales entr'elles; d'où il suit que les triangles DEF, AGH seront parfaitement égaux entr'eux (41). Le dernier des deux est essentiellement semblable au triangle ABC, à cause de la position parallèle des lignes BC et GH. Ainsi les triangles ABC et DEF seront semblables de même, ce qui fait l'objet du théorème actuel.

Des trois propositions qui déterminent la ressemblance de deux triangles, cette dernière, fondée sur l'identité du rapport entre leurs côtés homologues, étoit la plus conforme au principe général de ressemblance, établi en 159, et d'après lequel il faut réellement juger de la ressemblance de deux figures et de deux corps quelconques en général. Le rapport constant des côtés est pour les triangles semblables, ce que l'égalité des côtés respectifs est pour les triangles parfaitement égaux. Les deux autres propositions, concernant l'égalité de tous les angles respectifs, et l'égalité de deux angles compris entre des côtés proportionnels, font voir que dans les figures semblables en général, l'égalité de deux angles équivaut à deux rapports égaux de côtés.

Dans toutes les proportions, auxquelles la considération des triangles semblables nous a conduit, le théorème d'arithmétique, concernant l'égalité entre les

les produits des extrêmes et des moyens, trouve son application. Par-tout où les quatre termes d'une proportion sont des lignes, les rectangles compris entre les extrêmes et les moyens seront égaux entr'eux en surface; la surface d'un rectangle étant toujours estimée d'après le produit de ses deux côtés; et celle d'un parallélogramme, d'après celui de la base par la hauteur.

THÉORÈME.

175. *Dans deux triangles semblables, tels que ABC, DEF, deux lignes quelconques, qui ont une position semblable par rapport aux autres parties des triangles, sont entr'elles dans un rapport qui est le même que celui des autres côtés, opposés aux angles égaux des triangles.* (*Fig.* 67.)

Imaginons dans l'un des deux la ligne GH, partageant le côté AB au point G, et le côté BC au point H, l'un et l'autre dans un rapport quelconque.

Supposons que les côtés DE et EF soient partagés dans les mêmes rapports aux points I et K; de manière que

$$BA : ED = BG : EI$$
$$\text{et } BC : EF = BH : EK;$$

conditions nécessaires pour que les lignes GH et IK ayent la même position dans les deux triangles.

Les triangles étant supposés semblables, les rapports BA : ED et BC : EF seront égaux entr'eux; ce qui donne BG : EI = BH : EK.

Les triangles GBH et IEK auront donc les angles égaux B et E, compris entre des côtés pro-

proportionnels. Donc ils seront semblables entr'eux ; ce qui établira nécessairement le même rapport entre les lignes GH et IK, qu'entre les autres côtés homologues des deux triangles.

THÉORÈME.

176. *Lorsque d'un point quelconque, pris au-dedans ou au-dehors d'un polygone ABCDEFG, tel que le point I, on tire des diagonales à tous les angles du polygone; et que d'une diagonale à l'autre on mène une ligne parallèle au côté du polygone qui est compris entre ces deux diagonales; la suite de ces lignes formera un polygone abcdefg, semblable au polygone proposé ABCDEFG. (Fig.* 68.)

En vertu de cette construction, vous aurez deux polygones, composés d'un pareil nombre de triangles, disposés semblablement autour du point I, et tous semblables deux-à-deux. Le triangle AIB sera semblable à *aIb ;* le triangle BIC sera semblable à *bIc;* le triangle CID sera semblable à *cId* etc.

Les angles internes homologues des deux polygones seront égaux entr'eux ; chacun étant la somme de deux autres homologues, et appartenans à des triangles, semblables entr'eux.

Passant ensuite de chaque triangle à l'autre, vous aurez les proportions

AB : *ab* = BI : *bI*
BI : *bI* = BC : *bc*
BC : *bc* = CI : *cI*
CI : *cI* = CD : *cd*
CD : *cd* = DI : *dI*
DI : *dI* = DE : *de* etc. etc.

Tous ces rapports étant donc égaux entr'eux, vous aurez un rapport constant, entre deux côtés quelconques homologues, faisant partie des circonférences des deux polygones; de même qu'entre deux lignes quelconques, menées de deux angles homologues quelconques au point, commun aux deux polygones.

De plus, comparant les deux triangles ABC et *abc*, vous trouverez qu'ayant des angles égaux compris entre des côtés proportionnels, ils doivent être semblables; et qu'ainsi le rapport constant qui règne entre deux côtés quelconques des contours des deux polygones, aura aussi lieu entre les deux diagonales AC et *ac*. Il en sera de même lorsque vous aurez comparé deux autres diagonales quelconques homologues BD et *bd*; CE et *ce*; de même qu'entre les diagonales homologues qui soutendent deux ou plusieurs angles à la fois, telles que AD et *ad*; AE et *ae*; BE et *be*; et ainsi des autres.

Ainsi donc, d'après la construction énoncée dans le théorème, vous aurez deux figures semblables dans toutes leurs parties; et il en résultera que deux figures rectilignes seront semblables, lorsque moyennant des lignes qui partent d'un même point, elles pourront être décomposées dans un nombre égal de triangles semblables, semblablement placés.

La position que dans ce théorème nous avons assignée aux deux polygones ABCDEFG et *abcdefg*, et qui a donné lieu à la construction du pantographe, est pour les figures semblables ce qu'est la coïncidence pour les figures parfaitement égales. De même

même que la coïncidence de deux figures prouve leur égalité parfaite, de même deux figures seront semblables dans toutes leurs parties, dès qu'il sera possible de leur assigner la position *concentrique*, énoncée dans le théorème précédent. Le théorème suivant nous fera connoître les conditions, sous lesquelles cette position devient possible.

THÉORÈME.

177. *Toutes les fois qu'il existe entre les lignes AB, BC, et leurs paralleles DE, EF, la proportion AB:BC = DE:EF, et qu'on mene les lignes ADG, BEGH, CFH, dont les deux extrêmes rencontrent celle du milieu aux points G et H; je dis que ces deux points doivent nécessairement coïncider, et qu'ainsi les trois lignes ADG, BEGH et CFH concourront vers un seul point.* (*Fig.* 69.)

Les triangles AGB et DGE fournissent la proportion AB:DE=BG:EG. On tire de même des deux triangles semblables BHC et EHF la proportion BC:EF=BH:EH. Donc, si les deux rapports AB:DE et BC:EF sont égaux entr'eux, on aura la proportion BG:EG = BH:EH, ou BG:BH=EG:EH. Ici la différence des antécédens, de même que celle des conséquens, est la même ligne BE. Il faut donc que chaque antécédent soit égal à son conséquent. Ainsi on aura BG=BH; et EG=EH, d'où il suit que les deux points G et H tomberont l'un sur l'autre, et que les trois lignes, menées par les points A et D, B et E, C et F, concourront dans un seul point.

THÉO-

THÉORÈME.

178. *Lorsque les angles internes d'un polygone sont égaux à ceux d'un autre, et qu'il existe un rapport constant entre les côtés qui les comprennent, les deux polygones seront semblables.*

Les angles des deux polygones étant égaux deux à deux, on pourra les disposer de manière que les côtés qui les comprennent, soient parallèles entr'eux. Ces mêmes côtés étant proportionnels, le théorème précédent nous apprend, que toutes les lignes, tirées par leurs angles homologues, concourront dans un seul point, et qu'ainsi il existe pour ces deux polygones une position concentrique. Donc, ils seront semblables.

THÉORÈME.

179. *Des lignes quelconques, telles que AC, AD etc. menées du sommet d'un triangle A vers sa base, et traversant une ligne quelconque DG, parallèle à la base, divisent en parties proportionnelles et la base BE et la parallèle DG. (Fig. 70.)*

Les triangles semblables qui doivent avoir lieu par la supposition, nous fournissent les propositions qui suivent:

$$BC : DE = AC : AE;$$
$$AC : AE = CD : EF;$$
$$CD : EF = AD : AF;$$
$$AD : AF = DE : FG.$$

Ainsi

Ainsi, les rapports BC:DE, CD:EF, DE:FG étant égaux entr'eux, le théorème est démontré, lequel de plus ne présente qu'un cas particulier de celui de 176.

THÉORÈME.

180. *Les perimètres ou contours de deux figures semblables sont entr'eux dans le même rapport que leurs côtés homologues.*

Cela est une application simple et naturelle de la proposition démontrée en Arithmétique, que s'il y a une suite quelconque de rapports égaux entr'eux, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un antécédent à son conséquent.

THÉORÈME.

181. *Lorsque deux triangles ABC et ADE ont un angle de commun entr'eux, tel que A, ils seront, quant à leurs surfaces, dans le rapport composé des côtés qui comprennent cet angle; c'est-à-dire, qu'on aura: le triangle ABC est au triangle ADE, comme le produit AB×AC est au produit AD×AE. (Fig. 71.)*

Deux triangles quelconques sont entr'eux comme les produits de la base de chacun par sa hauteur (146), c'est-à-dire, qu'ils seront dans un rapport, composé de celui de leurs bases AC:AE, et de celui de leurs hauteurs BG:DF. Les triangles semblables ABG et ADF fournissent la proportion BG:DF=AB:AD (169). Le rapport des côtés AB:AD pouvant donc être substitué à celui des hauteurs BG:DF,

les deux triangles seront entr'eux dans le rapport composé des côtés qui comprennent l'angle commun.

THÉORÈME.

182. *Deux triangles semblables sont entr'eux dans le rapport des quarrés de leurs côtés homologues.*

Ce grand théorème n'est qu'un cas particulier du précédent. Les triangles étant semblables, les deux rapports de côtés qui comprennent les angles égaux, seront égaux de même. Il arrivera à ce rapport composé ce qui arrive à tout produit dont les facteurs sont égaux entr'eux ; il deviendra rapport des quarrés des côtés homologues.

THÉORÈME.

183. *Deux polygones semblables sont entr'eux dans le rapport des quarrés de leurs côtés homologues.*

Les polygones semblables sont décomposables en un pareil nombre de triangles, semblables entr'eux, et dans lesquels le rapport de deux côtés homologues quelconques est aussi celui de tous les autres (176). Ainsi chaque triangle, faisant partie de l'un, sera à son triangle homologue, faisant partie de l'autre, dans le rapport constant des quarrés de deux côtés homologues quelconques. La somme des premiers doit être dans le même rapport à la somme de tous les autres ; ce qui fournit le sujet du théorème.

THÉO-

THÉORÈME.

184. *Lorsque deux cordes, telles que AC, DE se coupent au-dedans d'un cercle suivant des rapports quelconques, le produit des deux segmens de l'une sera égal au produit des deux segmens de l'autre. (Fig. 63.)*

Tirant les lignes DA et CE, vous aurez, tant les angles A et E, que les angles D et C, égaux entr'eux, les uns et les autres étant des angles à la circonférence, qui ont le même arc compris entre leurs côtés (131). Il en résultera naturellement les triangles semblables ABD et BEC, qui fournissent la proportion AB:BD=EB:BC (163). On en tire facilement l'égalité des produits, qui fait l'objet du théorème.

185. *Corollaire.* Dans le cas particulier *(Fig. 64.)*, où l'une des deux cordes DE devient diamètre du cercle, tandis que l'autre AC la coupe à angles droits, cette dernière étant alors partagée en deux également (112), au lieu du produit des deux segmens de cette dernière, AB et BC, on aura alors le quarré de AB ou de BC. Il en résulte le théorème suivant, auquel nous reviendrons dans la suite.

THÉORÈME.

186. *Dans le demi-cercle, le quarré de toute ligne AB, perpendiculaire au diamètre DE, est égal au rectangle compris sous les deux segmens du diamètre, BD et BE. (Fig. 64.)*

THÉORÈME.

187. *Lorsque d'un même point B hors d'un cercle il part deux ou plusieurs sécantes, telles que BAC et BED, on aura le même produit, en multipliant chacune de ces sécantes par sa partie qui est hors du cercle.* (*Fig.* 65.)

Tirant les deux cordes AD, EC, on aura encore les deux triangles BAD, BEC, équiangles en vertu du théorème allégué dans la démonstration précédente (131). On en tire la proportion BA:BD=BE:BC (163), qui fournit naturellement l'égalité, énoncée dans le théorème.

188. *Corollaire.* Supposons que l'une des deux sécantes, BED, vienne à tourner autour de B, jusqu'à ce qu'entièrement située hors du cercle, elle devienne tangente, de sécante qu'elle étoit. L'intervalle ED s'évanouira alors; les deux points d'intersection D et E seront confondus dans le seul point de contact F; et à la place des lignes inégales jusqu'alors, BD et BE, on aura la seule tangente BF. Il en résulte le théorème suivant.

THÉORÈME.

189. *Le quarré de toute tangente, telle que BF, est égal au rectangle, compris sous une sécante quelconque qui part du point B, telle que BD, multipliée par sa partie hors du cercle BE.* (*Fig.* 65)

THÉORÈME.

190. *Si dans un point quelconque B du diamètre AC on élève la perpendiculaire indéfinie*

finie BGFD, et que de l'extrémité du diamètre A on mène une ligne quelconque AGH, qui rencontre cette perpendiculaire en G, et la circonférence en H; le rectangle compris sous la corde entière AH et sa partie AG, sera le même pour toutes ces lignes; et il sera égal au produit du diamètre entier, multiplié par le segment AB. (Fig. 66.)

Menant la corde AC, on aura les deux triangles ABG et AHC, semblables, parcequ'ils ont un angle commun en A, et que de plus ils seront rectangles, l'un en B, l'autre en H (132. 169). Ils fournissent la proportion AC:AH=AG:AB. (163) Egalant les produits des extrêmes et des moyens, on aura l'égalité énoncée dans le théorème.

191. *Corollaire* I. La position du point G sur la perpendiculaire BGFD ne diminue pas la généralité du théorème. Ce point G se trouvant hors du cercle en D, le point H sera en E; et les triangles semblables ABD et AEC fourniront encore la proportion AC:AE=AD:AB. Ainsi le rectangle compris sous AD et AE sera encore égal au produit du diamètre AC, multiplié par le segment AB.

192. *Corollaire* II. Dans la même supposition, la ligne AGH pourra être dirigée vers F; les deux points G et H seront alors confondus dans le seul point F; les deux lignes AG et AH deviendront égales, et à la place de leur produit, on aura le quarré de AF. Il en résultera un théorème fertile en conséquences, que nous nous contenterons d'énoncer ici, par-

parceque nous aurons occasion d'y revenir par la suite.

THÉORÈME.

195. *Si d'un point quelconque F de la circonférence, on abaisse sur le diamètre AC la perpendiculaire FB, le quarré de la corde AF sera égal au produit du diamètre AC, multiplié par le segment correspondant AB. (Fig. 66.)*

THÉORÈME.

194. *Lorsque la position des points P et Q sur le diamètre BCAQ est telle qu'il y ait la proportion CP:CA = CA:CQ: les deux lignes PM et MQ seront entr'elles dans un rapport constant, pour tous les points M de la demi-circonférence de cercle. (Fig. 72.)*

Ayant par supposition CP:CA=CA:CQ, vous aurez aussi CP:CM=CM:CQ, à cause de CA=CM. Les deux triangles CPM et CMQ, ayant l'angle commun C compris entre des côtés proportionnels, CP et CM d'une part, CM et CQ de l'autre, seront donc semblables (173); ce qui fournit pour les troisièmes côtés la proportion PM:MQ = CP:CM ou CP:CA. Le rapport de PM : MQ sera donc entièrement indépendant de la position du point M sur le demi-cercle, étant le même que le rapport constant CP:CA.

Le point M étant pris en A ou en B, le rapport PM:MQ sera dans le premier cas celui de AP:AQ; dans l'autre, ce sera celui BP:BQ.

La

La généralité démontrée du théorème fournira donc les deux proportions qui suivent:

$$AP:AQ=CP:CA.$$
$$BP:BQ=CP:CA.$$

Ce sont les deux proportions qu'on retire en effet de la proportion supposée

$$CP:CA=CA:CQ;$$

en prenant, dans celle-ci, premièrement les différences des antécédens et des conséquents, ensuite les sommes des antécédents et des conséquents, et en égalant leur rapport à celui d'un antécédent à son conséquent.

THÉORÈME.

195. *Dans tout quadrilatère inscrit au cercle ABCD, le produit des deux diagonales* $AC \times BD$ *est égal à la somme des produits des deux côtés opposés, savoir* $AB \times CD$ *et* $AD \times BC$. (*Fig.* 73.)

Tirez la ligne BE, qui fasse avec AB l'angle ABE égal à l'angle DBC; d'où il suit que l'angle ABD sera aussi égal à l'angle EBC.

Les triangles AEB et DCB, semblables à cause de l'égalité de leurs angles homologues (131), donnent la proportion $AE:AB=DC:DB$; d'où l'on tire $AB \times CD=AE \times BD$.

Les triangles CEB et DAB, semblables par la même raison, fourniront cette autre proportion $CE:CB=DA:DB$; d'où l'on tire $AD \times BC=CE \times BD$.

La

La somme des deux produits AB×CD et AD×BC sera donc égale à celle des deux produits AE×BD et CE×BD ; laquelle, ayant le facteur commun BD, et la somme des deux autres AE et CE égale à AC, ne sera réellement autre chose que le produit des deux diagonales AC×BD.

Un théorème analogue, mais plus difficile, nous apprend à déterminer le rapport entre les deux diagonales d'un quadrilatère inscrit au cercle, dont les côtés sont donnés. *Chacune des deux diagonales sera proportionnelle à la somme des produits des côtés qui aboutissent à ses extremités.* Nous en supprimons la démonstration, parceque des secours analytiques y conduisent bien plus directement, ainsi qu'à une infinité d'autres théorèmes, inaccessibles aux démonstrations de la Géométrie ordinaire.

PROBLÊME.

196. *Diviser une ligne droite donnée en un nombre quelconque de parties, qui soient entr'elles dans des rapports donnés.* (*Fig.* 58.)

Soit AC la ligne donnée. Soient AH, HF, FD, DB quatre autres lignes qui expriment le rapport mutuel des parties dans lesquelles la ligne AC doit être divisée.

Sous un angle pris à volonté, joignez à la ligne AC la ligne indéfinie AB, et portez sur cette dernière, en mettant l'une à côté de l'autre, la suite de lignes qui expriment le rapport mutuel des parties de AC; joignez les points extrêmes B et C; et par les points H, F, D etc. tirez les lignes HI, FG, DE etc. parallèles à BC.

La ligne donnée AC se trouvera divisée aux points I, G, E, dans le rapport des lignes données AH, HF, FD, DB. (161.)

PRO-

PROBLÈME.

197. *Construire géométriquement la règle de trois, c'est-à-dire, étant données trois lignes quelconques que nous désignerons par A*, a, *et N, trouver une quatrième proportionnelle* n, *telle que l'antécédent A soit à son conséquent* a, *comme N est à* n. (*Fig.* 73.)

Sous un angle quelconque, joignez les deux lignes indéfinies SX et SY. Du sommet S, portez sur la première SX l'antécédent A et le conséquent *a*, de S en A, et de S en *a*; portez de même sur la seconde SY, le troisième N, de S en N. Tirez AN, et menez lui par le point *a* la parallèle *an*.

La ligne S*n* sera la quatrième proportionnelle demandée. Car les triangles semblables donneront SA:S*a*=N:*n*. (161.)

PROBLÈME.

198. *Construire géométriquement la règle de* cinq ; *ou bien, étant données cinq lignes quelconques, que nous désignerons par A*, *B*, a, b, *N, on demande une sixième* n, *telle que le produit des antécédens A*×*B soit au produit des conséquens* a×b, *comme la cinquième N est à cette sixième* n. (*Fig.* 74.)

Sous un angle quelconque, joignez les droites indéfinies SX, SY. Portez sur la première tous les antécédens et tous les conséquens, du sommet S en A, en B, en *a*, et en *b*; chacune de ces lignes étant supposée aboutir dans la figure jusqu'au point où se trouve la lettre qui la désigne dans l'énoncé du problème. Portez de même sur l'autre SY, le cinquième terme de la proportion; savoir, la ligne N, de S en N.

Cela étant, joignez AN, et menez lui par *a*, la parallèle *a*G.

Joignez BG, et menez lui par *b* la parallèle *bn*.

Je

Je dis que S*n* sera la sixième proportionnelle demandée.

Car les parallèles AN et *a*G fournissent d'abord la proportion, A:*a*=N:SG.

Les parallèles BG et *bn* donnent ensuite, B:*b*= SG:S*n* (161). Multipliant les deux proportions dans l'ordre des termes, il en résultera

$$AB : ab = N : Sn.$$

La ligne S*n* sera donc la sixième proportionnelle qu'on demandoit.

PROBLÊME.

199. *Construire géometriquement la règle de* sept, *c'est-à-dire, étant données sept lignes quelconques, que nous désignerons par A, B, C,* a, b, c, *et N, on demande une huitième, telle que le produit des antécédens ABC soit au produit des conséquens* abc, *comme la septième N est à cette huitième.* (*Fig.* 75.)

Sous un angle quelconque, joignez les lignes indéfinies SX, SY. Du sommet S portez sur la première SX tous les termes antécédens, de même que tous les conséquens, A, B, C, *a*, *b*, *c*, chacune jusqu'au point où se trouve la lettre qui la désigne. Portez de même la septième des données N sur la seconde SY. Cela étant:

Joignez AN, et menez lui la parallèle *a*G. Joignez BG, et menez lui la parallèle *b*H. Joignez enfin CH, et menez lui la parallèle *cn*. Elle sera la huitième proportionnelle que vous demandiez.

Car vous tirez successivement de ces parallèles les proportions suivantes (161):

$$A : a = N : SG$$
$$B : b = SG : SH$$
$$C : c = SH : Sn.$$

En

En multipliant les trois proportions, et en supprimant les facteurs égaux de part et d'autre, vous aurez ABC : *abc* = N : S*n*. La ligne S*n* est donc la huitième proportionnelle qu'on demandoit.

PROBLÊME.

200. *Construire géométriquement la règle de* neuf; *ou, connoissant neuf lignes quelconques, que nous désignerons par A, B, C, D,* a, b, c, d, *et N, trouver une dixième, telle que le produit des quatre antécédens ABCD soit au produit des quatre conséquens* abcd, *comme la neuvième N est à la dixième qu'on demande.* (*Fig.* 76.)

Joignez sous un angle quelconque les deux lignes quelconques SX et SY. Portez sur la première SX, à partir du sommet S, les quatre antécédens de même que les quatre conséquens; chacune jusqu'à l'endroit où se trouve la lettre qui la désigne dans l'énoncé du problême. Portez de même sur l'autre SY la neuvième de ces données N. Cela étant :

Tirez AN, et menez lui la parallèle *a*G. Tirez BG, et menez lui la parallèle *b*H. Tirez CH, et menez lui la parallèle *c*I. Tirez DI, et menez lui la parallèle *dn*. La ligne S*n* sera la neuvième proportionnelle que vous demandiez.

Les parallèles fourniront les proportions qui suivent (161) :

A : *a* = N : SG
B : *b* = SG : SH
C : *c* = SH : SI
D : *d* = SI : S*n*.

En multipliant ces quatre proportions dans l'ordre, vous aurez

ABCD : *abcd* = N : S*n*.

La ligne S*n* sera donc celle que vous demandiez.

On continuera de même quelque soit le nombre des lignes proposées. Comme le problême dont nous

blême dont nous venons de donner une solution très-générale, est la base de la plûpart des constructions géométriques, j'ai cru devoir m'y arrêter particulièrement.

PROBLÊME.

201. *Étant donné l'angle S, et la position du point A, tirer par ce point la ligne CD, comprise entre les côtés de l'angle, de manière que la partie AD soit à la partie AC, dans le rapport donné M:N.* (*Fig.* 77.)

Par A menez AB, parallèle au côté CD de l'angle donné. Déterminez BC de manière qu'il y ait M:N=SB:BC (197) ; la ligne CAD sera celle que vous demandiez.

PROBLÊME.

202. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données A, B.* (*Fig.* 64.)

Sur une ligne indéfinie quelconque, prenez BD égale à A, et BE égale à B. Partagez DE en deux également ; et du point de milieu comme centre, avec un rayon égal à la moitié de DE, décrivez le demi-cercle DAE. Élévez en B la perpendiculaire BA. Elle sera la moyenne proportionnelle demandée.

Car le quarré de cette ligne BA sera égal au produit BD×AE (186). On aura donc BD:AB=AB:BE ; ainsi AB sera moyenne proportionnelle entre les deux lignes données A et B.

PROBLÊME.

203. *Étant donné un rectangle, ou un parallélogramme, ou un triangle, trouver le côté d'un quarré qui lui est égal en surface.*

En cas de rectangle, cherchez par le problême précédent, une moyenne proportionnelle entre les côtés du rectangle (202).

En

En cas de parallélogramme, cherchez une moyenne proportionnelle entre la base et la hauteur du parallélogramme (202).

En cas de triangle, cherchez une moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur, ou bien entre la hauteur et la moitié de la base du triangle (202).

Dans les trois cas, la moyenne proportionnelle que vous aurez trouvée, sera le côté du quarré, égal à la figure proposée.

PROBLÊME.

204. *Étant donné un polygone quelconque, trouver le côté d'un quarré qui lui est égal en surface.*

Commencez par transformer le polygone en un triangle de surface égale (157). Ensuite, cherchez une moyenne proportionnelle entre la hauteur et la moitié de la base (202); et le problême sera résolu.

PROBLÊME.

205. *Transformer un quarré proposé en un rectangle tel, que la somme de ses côtés soit égale à une ligne donnée, telle que DE.* (*Fig.* 64.)

Partagez en deux également la ligne DE. Du milieu de cette ligne comme centre, avec un rayon égal à sa moitié, décrivez le demi-cercle DAE, qui aura pour diamètre la ligne DE, somme des deux côtés du rectangle qu'on demande. A une distance égale au côté du quarré proposé, menez avec DE une parallèle, qui coupera la circonférence du demi-cercle en deux points, dont un sera A. Abaissez la perpendiculaire AB; les lignes BD et BE seront les côtés du rectangle qu'on demandoit.

Car leur somme sera égale au diamètre DE, d'après la construction. Leur produit sera donc égal au quarré de AB, qui est le quarré proposé (186).

PRO-

PROBLÈME.

206. *Transformer un quarré proposé en un rectangle, tel que la différence de ses côtés soit égale à une ligne donnée, telle que GH.* (*Fig.* 65.)

Sur une ligne IF, égale à la moitié de cette différence, élévez la perpendiculaire FB, égale au côté du quarré proposé. Du centre I, avec le rayon IF, décrivez le demi-cercle GFH, qui coupera dans les deux points G et H, la ligne tirée par B et I. Les lignes BG et BH seront les côtés du rectangle qu'on demandoit.

Car en vertu de la construction, leur différence est égale à la ligne donnée GH. Ensuite, l'une de ces deux étant la sécante entière, l'autre la partie de la sécante qui est hors du cercle, leur produit sera égal au quarré de la tangente BF, qui est le côté du quarré proposé (189).

CHAPITRE SEPTIEME.

LE THÉORÈME DE PYTHAGORE.

207. L'objet de tout ce chapitre étant le triangle rectangle, nous avertissons que nous donnerons le nom de *côtés*, à ceux qui comprennent l'angle droit B du triangle, savoir AB et BC ; et que nous réserverons celui d'*hypoténuse* pour le côté AC, qui est opposé à l'angle droit. (*Fig.* 80.)

De plus, abaissant du sommet B de l'angle droit une perpendiculaire BI sur l'hypoténuse, nous donnerons le nom de *segmens* aux deux par-

et BC est *moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et le segment correspondant;* et qu'ainsi le quarré de chaque côté est égal au rectangle compris entre ces deux lignes: ce qui constitue proprement le théorème de Pythagore. (195)

Les mêmes proportions mènent naturellement à ce qui fait proprement l'objet du théorème de Pythagore. Car les quarrés des côtés étant respectivement égaux aux rectangles compris entre l'hypoténuse entière et les segmens correspondans, on aura donc *(Fig.* 80) le quarré de AB égal au rectangle AHKI; et le quarré de BC égal au rectangle CLKI; ainsi la somme des deux quarrés sera égale au quarré entier de l'hypoténuse.

A cette démonstration, fondée sur les triangles semblables, nous joindrons les deux qui suivent, dont l'une est respectable par son antiquité, et dont l'autre se fait remarquer par son élégance.

PREMIÈRE DÉMONSTRATION,

tirée d'Euclide, Livre I. prop. 47.

Ayant construit sur chacun des trois côtés du triangle ABC le quarré qui lui appartient, savoir, le quarré ABED sur AB, le quarré BCGF sur BC, et le quarré ACLH sur AC, abaissez sur l'hypoténuse AC la perpendiculaire BI, laquelle étant prolongée, divisera le quarré de l'hypoténuse en deux rectangles, savoir AIKH, et CIKL. Ensuite, tirez les quatre lignes droites CD, AG, BH et BL.

Cela étant, comparez entr'eux le quarré ABED et le rectangle AIKH Le premier, étant posé sur AD comme base, sera compris entre les parallèles AD et CE: il sera donc le double du triangle DAC,

qui ayant cette même base, est compris entre les mêmes parallèles (146). L'autre, étant posé sur AH comme base, sera compris entre les parallèles AH et BIK; il sera donc le double du triangle BAH, qui ayant cette même base, est compris entre les mêmes parallèles (146). Mais comparant entr'eux les triangles DAG et BAH, vous y trouverez les côtés égaux AD et AB, les côtés égaux AC et AH, et les angles qu'ils comprennent DAC et BAH égaux entr'eux, étant composés l'un et l'autre de l'angle A et d'un angle droit. Ainsi, ces deux triangles étant égaux entr'eux (42), le quarré ABED et le rectangle AIKH, seront égaux de même.

Comparez de même le quarré BCGF au rectangle CIKL. Le premier, posé sur la base CG, sera compris entre les parallèles CG et AF; il sera donc le double du triangle GCA; lequel placé sur la même base, est compris entre les mêmes parallèles (146). L'autre, étant posé sur la base CL, sera compris entre les parallèles CL et BIK; il sera donc le double du triangle LCB, lequel placé sur la même base, sera compris entre les mêmes parallèles (146). Considérant ensuite les deux triangles GCA et BCL, vous y trouverez les côtés CG et BC, égaux entr'eux; les côtés AC et CL, égaux de même; enfin les angles GCA et BCL égaux entr'eux, étant composés l'un et l'autre de l'angle C et d'un angle droit. Ainsi, ces deux triangles étant égaux entr'eux (42), le quarré BCGF et le rectangle CIKL, seront égaux de même.

Il est donc prouvé que le quarré de chaque côté est égal au rectangle compris sous l'hypoténuse entière et le segment correspondant. Mais ces deux rectangles font ensemble le quarré de l'hypoténuse AC. Ainsi le quarré de l'hypoténuse est égal à la somme des quarrés des deux côtés.

SE-

SECONDE DÉMONSTRATION

tirée de la Géométrie de Clairaut.

Le triangle rectangle ABC étant encore celui du théorème, élevez sur le côté AB, mais en dedans du triangle, le quarré de ce côté ABDE. Portez l'autre côté BC de D en F, et sur DF élevez, en dedans du triangle, le quarré de ce côté DFLG. Portez ce même côté de E en H, et joignez les points A, H, L, C, par les lignes AH, LH, et CL. Il est visible que par cette construction vous aurez les trois triangles rectangles CFL, HGL, AEH, parfaitement égaux au triangle primitif ABC. De plus les hypoténuses de ces quatre triangles, AC, CL, AH et HL, qui se joignent sous des angles droits, formeront le quarré de l'hypoténuse ACLH.

Ces quatre triangles intercepteront entr'eux un pentagone irrégulier ACLGE, formant un angle droit et rentrant en E; deux angles droits saillans en C et G; et deux angles aigus en A et L, égaux à ceux du triangle primitif ABC. Ce pentagone fait avec les deux triangles AEH et HGL, le quarré de l'hypoténuse ACLH; et avec les deux autres ABC et CFL la figure ABFLGE, visiblement composée des quarrés des deux côtés ABDE et DFLG. Le quarré de l'hypoténuse est donc égal à la somme des quarrés des deux côtés.

Pour prouver l'égalité entre chacun de ces deux quarrés et le rectangle correspondant, tirez la droite BIGK, qui sera parallèle aux deux côtés AH et CL; et perpendiculaire sur AC et HL.

Le parallélogramme ABGH est égal au quarré ABDE, placé sur la même base AB, et compris entre les mêmes parallèles AB et DH (150). Il est aussi égal au rectangle AIKH, placé sur la même base AH, et compris entre les mêmes parallèles AH et BK (150). Le quarré du côté AB est donc égal au rectangle AIKH.

Le parallélogramme CBGL est égal au quarré DFGL, étant placé sur la même base GL, et compris entre les mêmes parallèles GL et BF (150). Il est encore égal au rectangle CIKL, étant placé sur la même base CL, et compris entre les mêmes parallèles CL et BK (150). Le quarré du côté BC est donc égal au rectangle CIKL.

Ainsi le quarré de chaque côté est égal au rectangle compris sous l'hypoténuse entière et le segment correspondant.

THÉORÈME.

209. *Le quarré de toute ligne composée de deux parties, contient les quarrés de chacune de ces deux parties, plus deux fois le rectangle formé par elles.* (*Fig.* 80. *a.*)

Sur la ligne AB, composée des deux parties AC et BC, élevez le quarré ABHG ; faites AD égale à AC, et par les points C et E menez les lignes CFI, DFE, parallèles aux côtés du quarré.

Le quadrilatère ABHG ou le quarré de AB, comprendra donc, *premièrement*, le quadrilatère ACFD, ou le quarré de AC. *Secondement*, le quadrilatère FEHI, ou le quarré de BC. *Troisièmement*, les deux rectangles égaux BEFC et DFIG, formés par les côtés BE et BC, DF et DG, qui sont égaux aux lignes AC et BC. Ce théorème peut être énoncé avec une généralité beaucoup plus grande, de la manière qui suit.

THÉORÈME.

210. *Le quarré de toute ligne, composée d'un nombre quelconque de parties, contient tous*

ous les quarrés élévés sur chacune de ces par-
es prises séparément, plus deux fois chacun
es rectangles qu'on peut former, en les com-
inant deux à deux. (Fig. 80. b.)

Sur la ligne, composée des trois parties AC, CD, BD, élevez le quarré ABCN; faites AE égale à AC, AI égale à AD, et par les points C, D, E, I menez les lignes CGLP, DHMQ, EGHF, ILMK, parallèles aux côtés du quarré.

Par cette construction, le quadrilatère BCN, ou le quarré de AB, sera composé des parties suivantes: *Premièrement*: le quarré CGE; c'est celui de AC. *Secondement*: le quarré GHML; c'est celui de CD. *Troisième-ment*: le quarré MKOQ; c'est celui de BD. *Quatrièmement*: les deux rectangles égaux CDHG : EILG: ils ont chacun pour ses deux côtés es parties AC et CD. *Cinquièmement*: les eux rectangles égaux BDHF et NIPL : ils ont our côtés les lignes AC et BD. *Sixièmement*: es deux rectangles égaux FHMK et PQML : ls ont pour côtés les parties CD, BD.

La construction et la démonstration étant pplicables à tel nombre de parties qu'on vou-ra supposer, le théorème est généralement émontré.

THÉORÈME.

211. *Le quarré de toute ligne qui exprime la différence de deux autres lignes, comprend les quarrés de chacune de ces deux lignes, moins*

moins deux fois le rectangle formé par elles. (Fig. 80. a.)

Sur la ligne AC, qui exprime la différence des deux lignes AB et BC, élevez le quarré ACFD. Élevez aussi sur AB, la plus grande des deux, le quarré ABHG ; et prolongez les lignes CF, DF jusqu'en I et en E.

Cela étant, on voit que si du quadrilatère ABHG on veut parvenir au quadrilatère ACFD, il faudra ôter du premier, *premièrement*, le rectangle DEHG ; il restera le rectangle ABED. *Secondement :* il faut ajouter à ce dernier le quadrilatère EFIH : il en résultera la figure ABHIFD, composée du quarré ACFD et du rectangle BCIH. *Troisièmement* : on en ôtera le rectangle BCIH ; il restera alors le quadrilatère ACFD.

Or il est visible que les trois quadrilatères ABHG, EFIH, ACFD sont les quarrés des trois lignes AB, BC et AC. On voit de même que les deux rectangles DEHG et BCIH sont égaux entr'eux, et que chacun d'eux est compris sous les lignes AB et BC. Donc le quarré de AC comprend ceux des deux lignes AB et BC, *moins* deux fois le rectangle AB×BC : ce qui fait l'énoncé du théorème.

THÉORÈME.

212. *La différence des quarrés de deux lignes est égale au rectangle compris sous la somme et sous la différence de ces lignes. (Fig. 80. c.)*

Ayant

Ayant fait BC=BD, supposons que AB, et BC ou BD soient les deux lignes en question, ayant AD pour somme et AC pour différence. Sur AB élevez le quarré ABLI : faites AE égale à AC ; par les points C et E menez les lignes CGK et FGE, parallèles aux côtés du quarré, et achevez le rectangle ADHE. Cela étant :

La différence des quarrés ABLI et GFLK, qui sont ceux des lignes AB et BC, constitue la figure ABFGKI, composée des deux rectangles ABFE et EGKI. Remplacez le rectangle EGKI par le rectangle BDHF qui lui est visiblement égal, vous aurez le rectangle ADHE, équivalent à la différence des quarrés des deux lignes AB et BC, et compris sous les côtés AD et DH, dont la première AD est la somme des lignes AB et BC, et dont l'autre DH, égale AC, exprime leur différence : ce qui est exactement l'énoncé du théorème.

THÉORÈME.

213. *Dans tout triangle ABC qui a un angle obtus en B, le quarré du côté AC, opposé à l'angle obtus, est plus grand que la somme des quarrés des autres côtés AB et AC. Et pour trouver l'excès du quarré de AC sur la somme des deux autres, prolongez l'un des deux côtés BC au delà de B, et abaissez du sommet A la perpendiculaire AF. Cet excès alors sera égal à deux fois le rectangle, compris entre la base BC, et le prolongement BF ; de manière que le quarré de AC sera égal à la somme des quarrés des deux côtés AB et BC, plus*

plus deux fois le rectangle compris entre BC et BF. (*Fig.* 82.)

Elevez sur AF et CF les quarrés AFED et CFKM. Tirez BL, perpendiculaire sur CF; et après avoir fait GK ou MI égal à BF, tirez GI.

Le quarré de AC est égal à la somme des quarrés de AF et de CF, ces deux lignes étant les côtés du triangle rectangle AFC, dont AC est l'hypoténuse. (208) Le quarré de AC est donc égal à la somme des parties suivantes: 1. le quarré de AF, qui est AFED. 2. Le quarré de BF qui est GHKL. 3. Le quarré de BC, ou BCIH. 4. Les deux rectangles BHGF et HIML, égaux entr'eux, et ayant pour côtés le côté BC et le prolongement BF (209).

Or les deux quarrés de AF et de BF font ensemble le quarré de AB (208). Le quarré de AC est donc égal aux deux quarrés de AB et de BC, plus deux fois le rectangle compris entre le côté BC et le prolongement BF.

214. *Corollaire* I. Au lieu de prolonger le côté BD, et d'abaisser la perpendiculaire AF, on pouvoit aussi prolonger le côté AB, et abaisser la perpendiculaire CN. Le quarré de AC auroit été égal alors, à la somme des deux quarrés des côtés AB et BC, plus deux fois le rectangle, compris entre AB et BN.

Les deux produits ou rectangles $BC \times BF$ et $AB \times BN$ sont en effet égaux entr'eux. On le voit par les triangles semblables BFA et BNC, qui fournissent la proportion $AB : BF = BC : BN$; d'où

d'où l'on tire facilement l'égalité des deux produits BC×BF et AB×BN.

215. *Corollaire* II. Donc, ôtant du quarré de AC, la somme des quarrés de AB et de BC, il restera le double produit de AB×BN, ou de BC×BF.

216. *Corollaire* III. Ainsi, divisant ce reste par 2 BC, on aura BF. Divisant ce même reste par 2 AB, on connoîtra BN. Ce théorème nous apprend donc à déterminer dans tout triangle, la position de la perpendiculaire, abaissée d'un angle quelconque sur la base opposée.

THÉORÈME.

217. *Dans tout triangle ABC, le quarré d'un côté AC opposé à un angle aigu B, est moindre que la somme des quarrés des deux autres côtés AB et AC. Et pour trouver l'excès de cette somme sur le quarré de AC, il faut abaisser la perpendiculaire AF. Cet excès alors sera égal à deux fois le produit de la base BC par le segment BF. (Fig. 83.)*

Ayant construit sur AF et sur BC les quarrés de ces côtés; ayant tiré de plus les lignes AFG et LKM, telles que LH ou MI soit égale à BF, le quarré de la ligne AC, comme hypoténuse du triangle rectangle AFC, sera égal aux quarrés de AF et CF (208). Il sera donc composé des parties suivantes: 1. le quarré de AF. 2. Le quarré de BC. 3. Il faudra *ôter* de ce dernier quarré les deux rectangles égaux BFGH et IHLM. Mais comme par cette

sous-

soustraction, on aura ôté *deux fois* le quarré de BF, qui est GHLK, il faudra 4. ajouter à ce reste *une fois* ce dernier quarré, lequel fait avec celui de AF, le quarré de AB (211).

Le quarré du côté AC est donc égal à la somme des quarrés des deux côtés AB et BC, moins deux fois le rectangle BC×BF, conformément à l'énoncé du théorème.

218. *Corollaire I.* Le théorème nous apprend donc, dans le cas d'un angle aigu comme dans celui d'un angle obtus, à déterminer la position de la perpendiculaire, lorsque les trois côtés d'un triangle sont donnés. Seulement il faut, que dans le cas d'un angle obtus, la perpendiculaire tombe au delà de la base; et que dans le cas d'un angle aigu, elle tombe entre les deux extrémités de la base; et qu'ainsi la ligne BF soit prise dans des sens contraires dans les deux cas.

219. *Corollaire* II. Les deux théorèmes nous apprennent enfin, que l'inverse du théorème de Pythagore est également vraie, et qu'un triangle doit être nécessairement rectangle, dès que le quarré d'un de ses côtés est égal à la somme des quarrés des deux autres.

THÉORÈME.

220. *Dans tout parallélogramme ABCD, la somme des quarrés des deux diagonales AD et BC, est égale à celle des quarrés des quatre côtés AB, CD, AC, BD. (Fig. 85.)*

Le

Le triangle BDC ayant un angle obtus en D, le quarré de la diagonale BC sera égal à la somme des quarrés de BD et CD, *plus* deux fois le produit CD×DG (213).

Le triangle ACD ayant un angle aigu en C, le quarré de la diagonale AD sera égal à la somme des quarrés de AC et CD, *moins* deux fois le produit CD×CF (217).

Mais les lignes CF et DG étant égales entr'elles, à cause des triangles parfaitement égaux AFC et BGD, (43) les produits CD×DG et CD×CF le seront aussi; et ainsi étant ajoutés et retranchés en même tems, ils ne laisseront aucun résultat. Les quarrés des deux diagonales feront donc une somme égale à ceux des quatre côtés du parallélogramme.

THÉORÈME.

221. *Lorsque de différents points B, C, D, E d'un demi-cercle on abaisse les perpendiculaires BF, CG, DH, EI sur le diamètre AK, les quarrés de toutes ces cordes sont entr'eux comme les segmens correspondans du diamètre; c'est-à-dire, comme les lignes AF, AG, AH, AI.* (*Fig.* 84.)

Tirant les lignes BK, CK, DK, EK, à l'autre extrémité du diamètre K, il en résultera les triangles rectangles ABK, ACK, ADK, AEK, qui auront tous l'hypoténuse commune AK. Ainsi les quarrés des cordes AB, AC, AD, AE, étant égaux à des produits, qui tous auront le facteur commun AK, les facteurs inégaux étant précisément les segmens AF, AG, AH,

AH, AI, conformément au théorème de Pythagore, ces quarrés seront entr'eux dans les rapports de ces mêmes segmens AF, AG, AH, AI.

222. *Corollaire.* Ainsi donc, réciproquement, les cordes AB, AC, AD etc. sont entr'elles comme les racines quarrées des segmens correspondans du diamètre.

REMARQUE GÉNÉRALE.

223. Le théorème de *Pythagore* n'a été démontré que pour les quarrés. Cependant il est susceptible d'une généralité beaucoup plus grande, ayant lieu pour toutes les figures semblables, construites sur leurs côtés homologues. Des figures semblables quelconques, se trouvant dans le même rapport entr'elles que les quarrés de leurs côtés homologues (183) sont soumises dans tous les rapports qui existent entr'elles, aux mêmes loix qui ont été démontrées pour les quarrés.

Ainsi, de trois figures semblables, qui auront pour côtés homologues l'hypoténuse et les deux côtés d'un triangle rectangle, la première est égale à la somme des deux autres.

De même, ayant deux ou plusieurs figures semblables, qui ont pour côtés homologues les cordes AB, AC, AD etc. d'un demi-cercle, ces figures seront entr'elles comme les segmens correspondans du diamètre AF, AG, AH etc.

C'est ici le lieu de parler de la *lunule d'Hippocrate de Chios*, ancien Géomètre Grèc, et élève de *Pythagore*.

Con-

Construisant sur chacun des trois côtés d'un triangle rectangle ABC, un demi-cercle, il suit de la remarque précédente, que le demi-cercle construit sur l'hypoténuse AC, et dont la circonférence passera par le sommet B de l'angle droit, sera égal à la somme des deux autres, construits sur les côtés AB et BC. Otant de part et d'autre les segmens de cercle M et N, il restera d'un côté le triangle rectangle ABC, de l'autre les deux lunules K et L, dont par conséquent la somme sera égale au triangle rectangle ABC.

Si les côtés AB et BC sont égaux entr'eux, les deux lunules le sont de même; on aura alors une lunule, égale à un triangle isoscèle.

Hippocrate ayant ainsi trouvé une portion de cercle, certainement égale à un triangle rectiligne, crut avoir fait un pas vers la quadrature du cercle entier. En ceci il se trompa: car il est tout aussi difficile de déterminer le rapport de cette lunule au cercle entier, que de trouver sa surface elle-même. Il en faut dire autant de toutes les lunules qui ont été inventées depuis.

Il ne faut pas confondre cet *Hippocrate de Chios*, habile Géomètre pour son tems, avec le célèbre Médecin *Hippocrate de Cos*. Il n'existe aucune preuve des connoissances de ce dernier en fait de Géométrie: et toute la réputation de Géomètre qu'il a encore aujourd'hui dans la tête de la plûpart des littérateurs, est uniquement fondée sur sa conformité de nom avec celui du vrai Géomètre, *Hippocrate de Chios*.

PROBLÊME.

224. *Connoissant les côtés A et C de deux quarrés, trouver celui du quarré, équivalent à leur somme.* (*Fig.* 86.)

Sur les deux côtés d'un angle droit, portez la ligne donnée A, de B en A; et la ligne C, de B en

en C. L'hypoténuse AC sera le côté d'un quarré, équivalent à la somme des deux quarrés (208).

S'il falloit convertir en quarré, la somme de plusieurs quarrés donnés, on se serviroit de cette solution pour les ajouter deux à deux, et le problême seroit résolu.

PROBLÊME.

225. *Connoissant les côtés A et B de deux quarrés, trouver celui du quarré, équivalent à leur différence.* (*Fig.* 86.)

Sur l'un des deux côtés d'un angle droit, portez le moindre des deux côtés de B en A; ensuite, prenez AC égale à l'autre côté B.

Le quarré de BC, devant être égal au quarré de l'hypoténuse AC, moins le quarré de l'autre côté AB, sera le quarré que vous cherchiez.

PROBLÊME.

226. *Étant donné deux figures semblables quelconques, on demande d'en construire une troisième, semblable aux deux figures données, et équivalente à leur somme ou à leur différence.*

Comme les figures semblables en général sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, le problême actuel est le même que les deux problêmes précédens. On prendra deux côtés homologues quelconques des deux figures, on en fera ce qu'on a fait pour les côtés des quarrés, et sur le nouveau côté qu'on aura obtenu, on construira une figure, semblable aux deux figures proposées.

PROBLÊME.

227. *Étant donné les trois lignes quelconques A, a, N, il faut en trouver une quatrième* n, *telle que*

que le quarré de A soit au quarré de a, *comme la troisième N est à l'inconnue* n. (*Fig.* 87.)

Ce problême n'est qu'un cas particulier de celui de (198). Il pourra même être énoncé plus généralement, et être étendu, en vertu de la même solution, à des puissances quelconques de l'antécédent, A et du conséquent *a*.

Dans le cas du quarré cependant, les propositions démontrées du cercle, nous fournissent la solution suivante, qui est plus simple que la solution générale.

Avec un rayon pris à volonté, décrivez le demi-cercle SAT : sur lequel vous porterez d'un point quelconque S, les deux lignes données, de manière qu'il y ait A=SA, *a*=S*a* : et vous abaisserez les perpendiculaires AB et *ab*.

Les deux lignes SB, S*b*, étant proportionnelles aux quarrés des lignes SA et S*a*, il n'y aura plus à construire que la proportion SB:S*b*=N:*n*, qui ne suppose que l'emploi de deux parallèles.

Ainsi, ayant tiré sous un angle quelconque la ligne indéfinie S*n*, faites SN égale à la ligne N ; tirez BN, et menez lui la parallèle *bn*. La ligne S*n* sera l'inconnue *n* que vous demandiez.

PROBLÊME.

228. *Étant donné les trois lignes quelconques A*, a, *N*, *il faut en trouver une quatrième* n, *telle que l'antécédent A soit au conséquent* a, *comme le quarré du troisième N est au quarré du quatrième* n. (*Fig.* 88.)

D'un rayon pris à volonté, décrivez le demi-cercle SBT. Sur son diamètre ST, vous porterez les deux lignes données A, *a*, de manière que SA=A, S*a*=*a*. Ayant élevé ensuite les perpendiculaires AB, *ab*, les quarrés des cordes SB, S*b*, seront proportionnels aux deux lignes A, *a* ; vous au-

DEF, égaux en surface, mais non semblables encore.

Menez HL, parallèle à BC; cherchez entre AL et AK la moyenne proportionnelle AN, et tirez MN, parallèle à BC. Le triangle ANM sera le triangle demandé.

Il est semblable au triangle ABC. Reste donc à prouver qu'il est égal en surface au triangle DEF, ou à son égal AHK.

La ligne AM étant moyenne proportionnelle entre AL et AK, on aura AL:AM=AM:AK. Les parallèles LH et MN donnent cette autre proportion AL:AM=AH:AN. Ainsi, le produit AM×AN étant égal à AK×AH, les triangles NAM et HAK seront égaux entr'eux, et le premier des deux sera le triangle qu'on cherchoit.

PROBLÊME.

231. *Faire un polygone, semblable au polygone donné A, et égal en surface à un autre polygone donné B.*

Transformez les deux polygones en quarrés de surface égale (204). Soit a le côté de l'un, et b le côté de l'autre. Soit de plus N un côté quelconque du polygone A; et n le côté homologue du polygone B.

Les polygones semblables étant entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues, les quarrés des quatre lignes a, b, N, n formeront visiblement une proportion géométrique, attendu que l'un et l'autre de ces deux rapports est celui de A : B. Donc, ayant $a : b = N : n$, le côté homologue n, de qui seul dépend la solution du problême, sera la troisième proportionnelle aux trois lignes a, b, et N.

Le problême précédent n'est qu'un cas très-particulier de celui-ci.

PROBLÊME.

232. *Diviser une ligne quelconque en un tel nombre de parties qu'on voudra, dont les quarrés soient entr'eux dans une raison donnée, que l'on suppose être celle des nombres ou des lignes, désignées par les lettres A, B, C, D etc.* (*Fig.* 90.)

D'un rayon *au moins* égal à la moitié de la plus grande des lignes données (en cas de nombres donnés, le rayon sera pris à volonté) tirez la demi-circonférence *SabcdT*. Du point S portez sur le diamètre ST, les lignes données A, B, C, D, chacune jusqu'au point où se trouve dans la figure la lettre qui la désigne. Elevez dans les points A, B, C, D, les perpendiculaires *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*: et tirez les cordes *Sa*, *Sb*, *Sc*, *Sd*, qui seront entr'elles comme les quarrés des segmens SA, SB, SC, SD, ou bien des quantités données A, B, C, D.

Restera donc à diviser la ligne proposée dans le rapport mutuel des lignes *Sa*, *Sb*, *Sc*, *Sd*; problême dont la solution a été enseignée en 196.

PROBLÊME.

233. *Partager un polygone quelconque en un nombre quelconque de polygones qui lui soient semblables, et qui soient entr'eux dans un rapport de lignes ou de quantités données, que nous désignerons par les lettres A, B, C, D, etc.* (*Fig.* 91.)

Désignant par N un côté quelconque du polygone proposé, le problême revient à trouver les côtés homologues des autres. Nous désignerons ceux-ci par les lettres mineures *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, etc.

Faites la ligne ST égale au côté N du polygone donné; et divisez ce côté dans les points A, F, G, proportionnellement aux lignes A, B, C, D; de manière que le rapport entre les parties SA, AF, FG, GT soit celui des quantités A, B, C, D. Portez ces quatre lignes SA, AF, FG, GT, de S sur

sur la ligne ST, chacune jusqu'au point où se trouve dans la figure la lettre qui la désigne, de manière qu'on ait SB = AF, SC = FG, SD = GT. Sur cette même ligne, décrivez le demi-cercle *SabcdT*, dont le diamètre soit égal à la somme de toutes ces quantités A, B, C, D. Dans les points A, B, C, D, élevez les perpendiculaires *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, et tirez les cordes *Sa*, *Sb*, *Sc*, *Sd*. Ces cordes seront les côtés homologues des polygones que vous cherchiez.

Car leurs quarrés étant entr'eux comme les segmens correspondans du diamètre N, et par conséquent comme les quantités A, B, C, D, le diamètre N sera à chacune des quantités A, B, C, D, comme le quarré de ce diamètre N est au quarré de chacune des cordes *Sa*, *Sb*, *Sc*, *Sd*. Donc, comme par construction, le diamètre N est égal à la somme des quantités A, B, C, D; le quarré de ce diamètre sera donc égal à la somme des quarrés des lignes *Sa*, *Sb*, *Sc*, *Sd*; lesquels étant proportionnels aux quantités données A, B, C, D, il faut en conclure qu'elles seront les côtés même *a*, *b*, *c*, *d*, homologues des polygones semblables, dans lesquels il falloit partager le polygone proposé.

CHAPITRE HUITIEME.

LES CERCLES INSCRITS AU TRIANGLE.

234. Le cercle qui touche *en dedans* les trois côtés d'un triangle donné ABC, est proprement nommé *Cercle inscrit au triangle*. Nous avons déjà enseigné à le construire (141). Divisant en deux également deux quelconques des trois angles du triangle, tels que les angles A et B, par les lignes AIL et BIM, le point de rencontre de ces deux lignes, savoir I sera

le centre du cercle inscrit. Et si de ce point on tire aux trois angles du triangle les lignes IA, IB, IC; et que de ce même point on abaisse sur les trois côtés les perpendiculaires ID, IE, IF; ces perpendiculaires seront égales entr'elles, et de plus, le triangle donné sera partagé en six triangles rectangles, qui seront égaux deux à deux; savoir AEI égal à AFI; BFI égal à BDI; et CDI égal à CEI (43).

235. Prolongeant de part et d'autre les trois côtés du triangle, il en résultera les trois espaces indéfinis UBCV, WACX, YABZ, dans chacun desquels on pourra inscrire un cercle, touchant à la fois un des trois côtés du triangle *en dedans*, et *en dehors* les prolongemens des deux autres. On n'aura qu'à diviser en deux également chacun des six angles externes du triangle (53), savoir CAW, BAY, ABZ, CBU, BCV, ACX, lesquels pris deux à deux, seront verticaux, et par conséquent égaux entr'eux, moyennant les six lignes AM, AN, BN, BL, CL, CM. Les trois points de rencontre de ces six lignes, prises deux à deux, savoir les points L, M, N, seront les centres *extérieurement inscrits*. *(Fig. 78.)*

236. Une conséquence naturelle de l'inverse de la proposition qui concerne l'égalité des angles verticaux (17), c'est que les deux lignes AM et AN, de même que les deux lignes BN et BL, enfin les lignes CL et CM, ne feront en tout que les trois lignes droites MN, NL et LM. Ainsi les trois centres L, M, N, formeront le triangle rectiligne LMN, dont les côtés pas-

passeront par les trois angles A, B, C du triangle primitif ABC.

237. De plus, il est facile de prouver, que les côtés de ce même triangle, savoir MN, NL et LM seront perpendiculaires sur les trois lignes AIL, BIM, CIN, par lesquels on a divisé également les trois angles du triangle primitif. En effet, l'angle BAI étant la moitié de l'angle interne BAC, tandisque l'angle BAN est la moitié de l'angle externe BAY, en vertu de la construction, il s'ensuit que la somme des deux angles BAI et BAN, ou bien l'angle IAN, sera la moitié de celle des deux angles BAC et BAY. Les derniers sont des angles de suite, dont la somme doit être celle de deux angles droits. L'angle IAN sera donc un angle droit; ainsi la ligne MN sera perpendiculaire sur AIL. On prouvera de la même manière que NL sera perpendiculaire sur BIM, de même que LM sur CIN.

238. Abaissant des centres L, M, N des trois cercles extérieurs, des perpendiculaires sur chacun des trois côtés du triangle, savoir: les perpendiculaires LK, MS, NQ sur le côté AC; LH, MR, NP sur le côté AB; et les perpendiculaires LG, MT, NO sur le côté BC, il en résultera une suite de triangles rectangles, lesquels, pris deux-a-deux, seront parfaitement égaux entr'eux. Tels sont les triangles LKC et LGC; les triangles LKA, LHA; les triangles LHB et LGB; les triangles MRA et MSA; les triangles MRB et MTB; les triangles MTC et MSC; les triangles NOB et NPB; les triangles

angles NOC et NQC ; enfin les triangles NQA et NPA. En comparant ces triangles deux-à-deux, on y trouvera partout une hypoténuse commune, et deux côtés égaux entr'eux, comme étant rayons du même cercle, ce qui suffit pour prouver l'égalité parfaite de deux triangles, rectangles d'ailleurs (50).

239. Donc, les bases de tous ces triangles, pris deux-à-deux, devant être égales entr'elles, on aura la suite de lignes égales que nous allons rapporter : savoir en partant de l'angle A, AE=AF ; AH=AK ; AR=AS ; AP=AQ. En partant de l'angle B, on trouvera BD=BF ; BH=BG ; BR=BT ; BO=BP. On aura pareillement, en partant de l'angle C, CD=CE ; CG=CK ; CS=CT et CO=CQ. Toutes ces égalités au reste peuvent être comprises dans le théorème suivant, qui est une conséquence naturelle des premières notions sur le cercle : savoir, que *deux tangentes, partant d'un même point, et menées de part et d'autre à un même cercle, sont égales entr'elles.*

240. Cette même construction fournira une longue suite de triangles rectangles, ou égaux, ou semblables entr'eux : Dix triangles seront semblables aux triangles AEI ou AFI ; savoir les triangles MSA ou MRA ; les triangles NPA ou NQA ; les triangles AHL ou AKL ; les triangles NCL et MBL ; enfin les triangles NBI et MCI. Dix autres triangles seront semblables au triangle BFI ou BDI ; savoir les triangles NOB ou NPB ; les triangles LGB ou LHB ; les triangles BRM ou BTM ; les triangles MCN et MAL

IAL; de même que les triangles IAN et ICL. On en trouvera dix autres, semblables au triangle CDI ou CEI; ce seront les triangles LGC ou LKC; les triangles MSC ou MTC; les triangles CON ou CQN; les triangles LAN et MBN; enfin les triangles MAI et LBI.

241. De plus, le triangle primitif étant partagé dans les trois triangles obliquangles AIC, AIB et BIC, moyennant les lignes AI, BI et CI, on verra dans cette même figure, pour chacun de ces triangles, trois autres triangles obliquangles qui lui seront semblables. Les triangles NIL, ABL et CBN seront tous semblables au triangle AIC. Les triangles MIL, ACL et MCB seront semblables au triangle AIB. Enfin les triangles NIM, BAM et NAC seront semblables au triangle BIC. La ressemblance de tous ces triangles se prouvera facilement par l'égalité de leurs angles respectifs, suite naturelle de ce qui a été démontré dans les paragraphes précédents.

242. Enfin, les triangles NAL et NBM, semblables l'un et l'autre au triangle CDI ou CEI, et par conséquent entr'eux, donnent la proportion NA : NB = NL : NM. Les deux triangles LNM et ANB, ayant l'angle commun en N compris entre des côtés proportionnels, seront par conséquent semblables entr'eux. Par cette même raison, le triangle LMN sera semblable au triangle AMC; et ce même triangle MLN sera encore semblable au triangle BLC. D'où il suit, que les triangles ABN, AMC et LBC, qui comprennent le triangle primitif, et qui ont ses trois côtés pour bases,

bases, étant tous semblables au grand triangle LMN, le seront aussi entr'eux.

243. Les rapports généraux qui existent entre les trois côtés du triangle primitif, les rayons des quatre cercles inscrits, et les distances de leurs centres, tant entr'eux, qu'aux trois angles du triangle primitif, nous ont paru assez remarquables pour être l'objet d'un chapitre particulier. Supposant les trois côtés du triangle primitif ABC donnés, nous les désignerons par les trois lettres *a*, *b*, *c*, chacune de ces lettres étant censée appartenir au côté, qui est opposé à l'angle du même nom; de manière que BC=*a*; CA=*b*; AB=*c*. De plus, nous employerons la lettre S pour exprimer la *demi-somme des trois côtés*; de manière que la somme entière des mêmes côtés soit égale à 2S, ou au double de S. Enfin, nous appellerons *complément de chaque coté* le reste qu'on obtient, en ôtant ce côté de la demi-somme des trois côtés. Ainsi le complément du côté BC ou *a* sera S—*a*; le complément du côté CA ou *b* sera S—*b*; le complément du côté AB ou *c* sera S—*c*.

THÉORÈME.

244. *Les lignes, menées de chacun des trois angles aux deux points de contact du cercle inscrit interne qui se trouvent sur les côtés de cet angle, sont respectivement égales aux complémens des côtés opposés.*

Les deux lignes BD et BF, égales entr'elles et menées de l'angle B aux deux points de contact

tact intérieur D et F, qui se trouvent sur les côtés de cet angle, sont ce qui reste de la somme des trois côtés, après qu'on en a ôté les lignes AF, AE, CE, CD, dont la somme est égale au double du côté opposé AC ou *b*. Ainsi le double de BD ou de BF, sera égale à 2S—2*b*. Donc, prenant la moitié de part et d'autre, on aura BD ou BF égale à S—*b*, ce qui est l'énoncé du théorème.

On aura donc AE ou AF = S—*a*;
BD ou BF = S—*b*;
CD ou CE = S—*c*.

THÉORÈME.

245. *Les lignes, menées de chacun des trois angles aux deux points de contact du cercle inscrit externe, qui est compris entre les côtés de cet angle, sont égales chacune à la demi-somme des trois côtés.*

La somme des deux lignes égales BR et BT, ou le double de chacune de ces lignes, est composée des deux côtés AB et BC, plus AR et CT, lesquelles font ensemble le troisième côté AC. Donc, prenant la moitié de part et d'autre, on aura chacune de ces lignes BR et BT, égale à S; ce qui est l'énoncé du théorème.

Corollaire. Considérant que cette même démonstration s'étend aux lignes AH, AK, CO, CQ, et combinant ce théorème avec le précédent, on verra que S, demi-somme des trois côtés, est exprimée par chacune des lignes AH, AK, BR, BT, CO, CQ. On verra de plus que chacun des trois complémens se trouve *six* fois dans la figure, savoir:

Le

Le complément du côté BC, ou S—a, est égal à chacune des lignes AF, AE; BO, BP; CS, CT.

Le complément du côté CA, ou S—b, est égal à chacune des lignes BD, BF, AP, AQ; CG, CK.

Le complément du côté AB, ou S—c, est égal à chacune des lignes CD, CE, AR, AS, BG, BH.

THÉORÈME.

246. *Le quarré du rayon du cercle inscrit interne, est égal au produit des complémens des trois côtés, divisé par leur demi-somme.*

Les triangles semblables BRM et BFI donnent la proportion BR:RM=BF:FI. Et des triangles semblables MRA et AFI, on tire la proportion RM:AR=AF:FI. Multipliant par ordre ces deux proportions, et supprimant le facteur commun RM, qui se trouve antécédent et conséquent à la fois, on aura la proportion BR:AR=BF×AF:FI². Ou bien S:S—c=(S—b)(S—a):FI². Le quarrè de FI, rayon du cercle inscrit interne, sera donc égal au produit (S—a)(S—b)(S—c), divisé par S; ce qui est l'énoncé du théorème.

THÉORÈME.

247. *Le quarré du rayon de chacun des trois cercles inscrits extérieurs, se trouve en multipliant ensemble la demi-somme des trois côtés, et les complémens des deux côtés entre lesquels le cercle est compris, et en divisant le produit par le complément du troisième côté.*

Les triangles semblables BRM et BFI donnent la proportion BF:FI=BR:RM. On tire cette autre

autre proportion FI:AF=AR:RM des deux triangles semblables AFI et MRA. Multipliant par ordre les deux proportions, et supprimant le facteur commun FI, qui est antécédent et conséquent à la fois, on aura $BF:AF=BR\times AR:RM^2$. Ou $S-b:S-a=S(S-c):RM^2$. Le quarré de RM sera donc égal au produit $S(S-a)\ (S-c)$, divisé par $S-b$; ce qui est l'énoncé du théorème.

Corollaire. Appliquant cette démonstration aux rayons des trois cercles extérieurs, on trouvera:

$LH^2= S\ (S-b)\ (S-c)$, divisé par $S-a$.
$MS^2= S\ (S-a)\ (S-c)$, divisé par $S-b$.
$NP^2= S\ (S-a)\ (S-b)$, divisé par $S-c$.

THÉORÈME.

247. *Le quarré de la ligne qui exprime la distance du centre du cercle inscrit interne à chacun des angles du triangle primitif, se trouve en multipliant ensemble les côtés, qui comprennent cet angle, et le complément du troisième côté, et en divisant le produit par la demi-somme des trois côtés.*

Les triangles semblables AKL et AEI donnent la proportion AK:AL = AE:AI. On tire des deux triangles semblables ABL et AIC la proportion qui suit: AL:AB = AC:AI. Multipliant par ordre et supprimant le facteur commun AL, qui est antécédent et conséquent à la fois, on aura $AK:AB = AC\times AE:AI^2$; ou bien $S:c = b(S-a):AI^2$. Le quarré de AI sera donc égal au produit

bc (S—a), divisé par S; ce qui est l'énoncé du théorème.

Corollaire. Appliquant cette démonstration aux trois distances AI, BI, CI, on aura:

$AI^2 = bc\,(S-a)$, divisé par S.
$BI^2 = ac\,(S-b)$, divisé par S.
$CI^2 = ab\,(S-c)$, divisé par S.

THÉORÈME.

249. *Le quarré de la ligne qui exprime la distance de chaque cercle inscrit extérieur à l'angle opposé du triangle primitif, se trouve en multipliant ensemble la demi-somme des trois côtés, et les deux côtés qui comprennent ce cercle, et en divisant le produit par le complément du troisième côté.*

Les triangles semblables AEI et AKL donnent la proportion AE:AI=AK:AL. Et on tire des triangles semblables ABL et AIC la proportion suivante: AI:AC=AB:AL. Multipliant par ordre, et supprimant le facteur commun AI, il résulte $AE:AC = AB \times AK:AL^2$, ou bien $S-a:b=cS:AL^2$. Le quarré de AL sera donc égal au produit bcS, divisé par S—a: ce qui est l'énoncé du théorème.

Corollaire. Si on applique cette démonstration aux trois lignes AL, BM, CN, on aura:

$AL^2 = Sbc$, divisé par S—a;
$BM^2 = Sac$, divisé par S—b;
$CN^2 = Sab$, divisé par S—c.

THÉO-

THÉORÈME.

250. *Le quarré de chacune des six lignes qui expriment la distance du centre de chaque cercle extérieur, aux deux angles adjacens du triangle primitif, se trouve en multipliant ensemble les côtés qui comprennent cet angle, et le complément de celui des deux qui a son point de contact avec ce cercle hors du triangle primitif, et en divisant le produit par le complément de l'autre.*

Les triangles semblables AQN et ASM donnent la proportion AQ:AN=AS:AM. Et les triangles semblables BAN et MAC fournissent cette autre proportion AN:AB=AC:AM. Multipliant par ordre et supprimant le facteur commun AN, on aura AQ:AB=AS×AC:AM², c'est-à-dire, S—*b*:*c*=*b* (S—*c*):AM². Le quarré de AM sera donc égal au produit *bc* (S—*c*), divisé par S—*b*; ce qui est l'énoncé du théorème.

Corollaire. Appliquant cette même démonstration aux six lignes qui sont l'objet de ce théorème, on aura la table suivante:

$AM^2 = bc\ (S-c) : S-b.$
$AN^2 = bc\ (S-b) : S-c.$
$BN^2 = ac\ (S-a) : S-c.$
$BL^2 = ac\ (S-c) : S-a.$
$CL^2 = ab\ (S-b) : S-a.$
$CM^2 = ab\ (S-a) : S-b.$

THÉORÈME.

251. *Le quarré de la ligne qui exprime la distance du centre du cercle inscrit intérieur*

rieur à celui de chacun des trois cercles extérieurs, se trouve en multipliant les deux côtés qui comprennent ce cercle par le quarré du troisième, et en divisant le produit par le complément de ce dernier, et par la demi-somme des trois côtés.

On tire des deux théorèmes (250. 248.) les deux proportions qui suivent : $S-a:S-b=ab:CL^2$; et $S:S-b=ac:BI^2$; d'où l'on obtient en multipliant, $S(S-a):(S-b)^2=aabc:CL^2\times BI^2$. Mais les triangles semblables BFI et LCI donnent la proportion, BF ou $S-b:BI=CL:IL$; et par conséquent $(S-b)^2:BI^2=CL^2:IL^2$. Multipliant par ordre, et supprimant les quarrés des trois lignes BI, CL et $S-b$ ou BF, qui se trouvent à la fois parmi les antécédens et parmi les conséquens, on obtient le quarré de IL égal à *aabc*, divisé par $S(S-a)$; ce qui est l'énoncé du théorème.

THÉORÈME.

252. *Le quarré de la ligne qui exprime la distance entre les centres des deux cercles inscrits extérieurs, se trouve en multipliant le quarré du côté du triangle primitif qui se trouve entre les deux centres, par les deux autres côtés, et en divisant le produit par les complémens de ces mêmes côtés.*

On tire des deux théorèmes (248. 249.) les deux proportions qui suivent : $S:S-b=ac:BI^2$; et $S-c:S=ab:CN^2$; d'ou l'on obtient en multipliant, et en supprimant le facteur commun S, $S-c:S-b=aabc:BI^2\times CN^2$. Mais les triangles

ıgles semblables BFI et NCM fournissent la roportion, BF ou S—*b*:BI=CN:MN; et par onséquent (S—*b*)²:BI²=CN²:MN². Multipliant ar ordre, et supprimant les quarrés des lignes)I et CN, de même que le facteur S—*b*, se rouvant tous parmi les antécédens et les conéquens à la fois, on aura le quarré de MN gal à *aabc*, divisé par le produit (S—*b*))—*c*), ce qui constitue l'énoncé du théorème.

Corollaire. On aura donc pour les quarrés des x lignes qui sont l'objet des deux derniers théomes, les expressions suivantes:

IL²= *aabc* : S (S—*a*).
IM²= *abbc* : S (S—*b*).
IN²= *abcc* : S (S—*c*).
MN²= *aabc* : (S—*b*) (S—*c*).
LN²= *abbc* : (S—*a*) (S—*c*).
LM²= *abcc* : (S—*a*) (S—*b*).

THÉORÈME.

253. *La surface d'un triangle quelconque BC est égale à la racine quarrée du produit s quatre facteurs suivans: S, S—AB, S—BC, —AC. (Fig. 78.)*

En inscrivant un cercle dans le triangle, on trouvera composé de trois triangles tels que IB, BIC, CIA, dont les sommets se trouvent u centre de ce cercle; ayant pour leurs trois ases, les trois côtés du triangle; et pour haueur égale, le rayon du cercle inscrit. L'aire e ce triangle sera donc égale à S, demisomme es trois côtés, multiplié par la raison quarrée u produit S—AB, S—BC et S—AC, et divi- par la racine de S, fraction qui exprime le

rayon

rayon du cercle inscrit. Mais une quantité quelconque, telle que S, divisée par sa racine quarrée, est égale à cette racine quarrée même. Il en résultera donc l'aire du triangle égale à la racine quarrée du produit S, S—AB, S—BC, S—AC.

THÉORÈME.

254. *Le rayon du cercle circonscrit au triangle est égal au produit des trois côtés, divisé par quatre fois l'aire du triangle.*

Du centre D abaissez sur un des côtés AC la perpendiculaire DEF, qui divisera en deux également, et la corde AC et l'arc AFC. Abaissez aussi la perpendiculaire AG. *(Fig. 79.)*

L'angle au centre D devant être égal à l'angle à la circonférence B, l'un et l'autre ayant pour mesure la moitié de l'arc AC, il en résultera les deux triangles semblables DEA et BGA, d'où l'on tire la proportion AB.AG=AD:AE; qui donne l'égalité AB×AE=AD×AG; et prenant le double de part et d'autre, AB×AC= 2 AD×AG. Mais BC×AG, produit de la base par la hauteur, exprimera la double surface du triangle. Ainsi, désignant par T la simple surface, on aura BC×AG=2T. Multipliant par ordre les produits égaux de part et d'autre et supprimant le facteur commun AG, il en résulte 4 AD×T égal à AB×AC×BC; ce qui donne AD, rayon du cercle circonscrit, égal AB×AC×BC, produit des trois côtés, divisé par 4 T, ou quatre fois l'aire du triangle.

CHA-

CHAPITRE NEUVIEME.

LES POLYGONES RÉGULIERS.

DÉFINITIONS.

254. Tout polygone dont les côtés, de même que les angles sont égaux entr'eux, prend le nom de *régulier*.

255. *Corollaire I.* Si l'on partage en deux également tous les angles d'un polygone régulier, il en résultera une suite de triangles isoscèles parfaitement égaux entr'eux, dont les côtés concourront tous dans un même point au milieu du polygone (117), lequel se trouvant à une même distance de tous les sommets de ses angles, sera le centre d'un cercle qu'on pourra *circonscrire* au polygone.

256. *Corollaire II.* Si aux points de milieu de tous les côtés d'un polygone régulier, on élève des perpendiculaires, ces perpendiculaires concourront encore dans un point au milieu du polygone, qui se trouvera également éloigné de tous ses côtés, et qui sera le centre d'un cercle, qu'on pourra *inscrire* au polygone (123).

257. *Corollaire III.* Réciproquement, si l'on divise la circonférence d'un cercle en un nombre quelconque de parties égales, et qu'on tire des cordes d'un point de division à l'autre, on formera un polygone régulier, *inscrit* au cercle.

258. *Corollaire IV.* De même, si l'on divise la circonférence d'un cercle en un nombre quelconque de parties égales, et qu'à chaque point de division on mène une tangente à ce cercle, ces tangentes formeront encore par leurs concours un polygone régulier, circonscrit à ce cercle.

259. *Corollaire V.* Tous les polygones réguliers, d'un même nombre de côtés, sont semblables entr'eux. (178.)

260. *Corollaire VI.* En conservant le nom d'*apothème* (92) à la perpendiculaire abaissée du centre du polygone sur un de ses côtés, tout polygone sera composé de triangles isoscèles parfaitement égaux entr'eux; qui auront tous pour hauteur commune l'apothème du polygone, et dont le nombre sera égal à celui de ses côtés.

261. *Corollaire* VII. Et comme chacun de ces triangles est lui-même composé de deux triangles rectangles parfaitement égaux, tout polygone régulier sera composé de deux fois autant de triangles rectangles parfaitement égaux qu'il a de côtés, et dont la hauteur commune sera l'apothème du polygone.

262. *Corollaire* VIII. La surface de tout polygone régulier est égale à la moitié du produit de son contour par l'apothème (147).

263. *Corollaire IX.* Tous les angles externes, de même que les angles au centre d'un polygone régulier étant égaux entr'eux, on trou-

trouvera l'un et l'autre en divisant la somme de quatre angles droits par le nombre de ses côtés (73).

264. *Corollaire X.* Et comme chaque interne fait avec son externe la somme de deux angles droits, on en déduira naturellement la règle pour trouver l'angle interne d'un polygone régulier, dont on connoit le nombre de côtés. *Otez* deux *du nombre des côtés, et divisez le reste par ce nombre: vous aurez l'angle interne, la somme de deux angles droits étant supposée égale à l'unité.*

L'angle interne sera donc d'*un tiers* dans le triangle: d'*un demi*, dans le quarré; de *trois cinquièmes* dans le pentagone; de *deux tiers* dans l'exagone; de *cinq septièmes* dans l'heptagone; de *trois quarts* dans l'octogone; de *sept neuvièmes* dans l'ennéagone; de *huit dixièmes* dans le décagone.

Toutes ces fractions expriment le rapport de l'angle interne à la somme de *deux angles droits*. Plus le nombre des côtés est grand, et plus l'angle interne approche de la somme de deux angles droits, avec laquelle il sera entièrement confondu dans le cas du cercle.

265. *Corollaire XI.* Les contours de polygones réguliers du même nombre de côtés sont entr'eux dans le rapport des rayons de leurs cercles inscrits, ou de leurs cercles circonscrits (180).

266. *Corollaire XII.* Les surfaces de polygones réguliers du même nombre de côtés sont entr'elles comme les quarrés des rayons de leurs cercles inscrits, ou comme les quarrés des rayons de leurs rayons circonssrits (183).

Ces propositions sont des conséquences naturelles de l'idée générale qu'on doit se faire d'un polygone régulier, d'après la définition que nous en avons donnée.

Les fig. 93. 94. 95. en présentent des exemples. La *Fig.* 93. fait voir un triangle et un hexagone, tant inscrit que circonscrit au cercle. Dans la *Fig.* 94. on voit un quarré et un octogone, tant inscrit, que circonscrit au cercle. Enfin la *Fig.* 95. présente un pentagone inscrit et circonscrit, de même qu'un décagone inscrit au cercle.

Pour passer du polygone inscrit au polygone circonscrit, ainsi qu'aux polygones inscrit et circonscrit d'un double nombre de côtés, on aura les théorèmes qui suivent.

THÉORÈMES.

267. *Le côté BC du polygone inscrit est au côté EF du polygone circonscrit, comme l'apothème DI du premier est au rayon CI; ou bien, comme la corde supplémentaire SB est au diamètre SC.* (*Fig.* 96.)

268. *Le côté du polygone inscrit d'un nombre de côtés double est égal à la racine quarrée du produit du diamètre, multiplié par le rayon moins l'apothème.*

269. *Le demi-côté du polygone inscrit est au rayon, comme le rayon moins l'apothème est au demi-côté du polygone circonscrit d'un nombre de côté double.*

Soit BC le côté du polygone inscrit. Abaissez du centre I la perpendiculaire IDA, qui divisera BC en deux également en D. Joignez AB et AC. Tirez les rayons IBE et ICF.

Me-

Menez la tangente EAF, et abaissez sur les cordes AB et AC les perpendiculaires IK et IL, que vous prolongerez en G et H. Ainsi EF sera le côté du polygone circonscrit; AB ou AC, et GH seront les côtés des polygones inscrits et circonscrits d'un nombre de côtés double. Cela étant, on aura: BC:EF=ID:IA ou ID:IC. De plus, le triangle SBC étant rectangle en B, on aura ID:IC=SB:SC. On en tire naturellement BC:EF=SB:SC, ce qui forme la première partie du théorème. *(Fig. 96.)*

Le quarré de AB est égal au produit du diamètre entier, multiplié par le segment correspondant AD; ce qui en est la seconde.

L'angle à la circonférence ABC est égal à l'angle AIH, l'un et l'autre ayant pour mesure la moitié de l'arc AC. Il en résultera les triangles semblables BDA et IAH, d'où on tire la proportion BD:AD=AI:AH; ce qui donne la troisième partie du théorème.

Désignant par 1 le rayon AI, et par a le demi-côté BD du polygone inscrit, le côté AB, appartenant au polygone inscrit d'un nombre de côtés double, sera égal à la racine quarrée de $1+a$, moins la racine quarrée de $1-a$; ce que nous verrons en son lieu.

Le triangle, le quarré et le pentagone, de même que les polygones qui en résultent, en doublant successivement le nombre de leurs côtés, ont été les seuls accessibles à la Géométrie élémentaire, jusqu'à l'époque de l'ouvrage du Géomètre Allemand *Gauss*, intitulé *Disquisitiones Arithmeticæ*; qui a fait voir que cette Géométrie pouvoit encore embrasser les polygones de 17, de 257, de 4097 côtés; et généralement tous les nombres *premiers*, compris sous la formule générale $2n+1$.

Comme

Comme dans tout ce chapitre il ne sera question que de polygones réguliers, nous supprimons le terme de *régulier*, et nous écrirons simplement, *polygone*.

Nous employerons souvent le signe $\surd$ pour désigner *la racine quarrée* du nombre, ou de la quantité qui est placée immédiatement après le signe. C'est ainsi que $\surd 2$, $\surd 3$, désigneront les racines quarrées de *deux* ou de *trois*.

Le quarré de la racine est donc la quantité même, placée après le signe radical. Les quarrés de $\surd 2$ ou de $\surd 3$ sont *deux* ou *trois*.

THÈORÈMES.

270. *Le côté de l'hexagone inscrit au cercle est égal au rayon.*

271. *Le quarré du côté du triangle inscrit au cercle est égal à trois fois le quarré du rayon.*

272. *Le côté du triangle circonscrit au cercle est égal au double du côté du triangle inscrit.*

273. *La surface de l'hexagone inscrit est égale aux trois quarts de l'hexagone circonscrit.*

La corde AB étant faite égale au rayon du cercle, il en résultera le triangle équilateral AIB, dont les trois angles doivent être égaux entr'eux (70). Ainsi chacun de ces angles sera égal aux deux tiers d'un angle droit (70), ce qui fait précisément l'angle au centre dans l'hexagone régulier. La corde AB, égale au rayon, sera donc le côté de l'hexagone, inscrit au cercle. *(Fig.* 93*)*.

Si

Si l'on joint ensemble les angles B, M et O de l'hexagone, il en résultera le triangle inscrit BMO. Considérant le triangle MBN, rectangle en B, on verra que son hypoténuse MN est égale au diamètre, double du rayon : que le côté BN est le côté de l'hexagone, égal au rayon : et que l'autre côté BM est le côté du triangle. Le quarré de celui-ci sera donc égal au quarré du diamètre, moins celui du rayon (208), c'est-à-dire, à trois fois le quarré du rayon.

Faisant passer aux points B, M et O, des tangentes au cercles, il en résultera le triangle équilatéral GLH, circonscrit au cercle, et visiblement composé des quatre triangles égaux et équilatéraux LMO, GMB, HBO, BMO, dont celui-ci est le triangle inscrit lui-même. Le côté du triangle circonscrit est donc double de celui du triangle inscrit.

L'hexagone inscrit est composé de douze triangles rectangles égaux, tels que IEB. L'hexagone circonscrit est pareillement composé de douze triangles rectangles, tels que IBC. Ces deux triangles sont semblables entr'eux ; et de plus ils sont semblables au triangle MBN, comme on peut facilement s'assurer en comparant leurs angles respectifs. Les deux hexagones seront donc entr'eux comme les quarrés des côtés homologues de ces triangles (182), c'est-à-dire, comme les quarrés des lignes IE et IB, qui sont entr'elles comme BM et MN. Or, le quarré de BM est égal à *trois* fois, et le quarré de MN, à *quatre* fois le quarré du rayon.

rayon. L'hexagone inscrit est donc à l'hexagone circonscrit comme *trois* est à *quatre*; c'est à-dire que le premier est égal aux *trois quarts* de l'autre.

Voici encore quelques renseignemens sur le triangle et l'exagone, tant inscrit que circonscrit. Le rayon du cercle, ainsi que le quarré du rayon, sont supposés égaux à l'unité.

Exagone inscrit. Son côté est 1; l'apothème est égal à la moitié de $\sqrt{3}$; sa surface est égale à la moitié de $3\sqrt{3}$, ce qui fait en nombres 2,598.

Exagone circonscrit. Le quarré de son côté est au quarré du rayon comme 4:3. Sa surface est $2\sqrt{3}$, ce qui fait en nombres 3,464.

Triangle inscrit. Le quarré du côté est égal à trois fois le quarré du rayon: son apothème égal à la moitié du rayon; sa surface égale au quart de $3\sqrt{3}$; ce qui fait en nombres 1,299.

Triangle circonscrit. Toutes ses dimensions sont doubles de celles du triangle inscrit.

Les surfaces des quatre polygones, savoir le triangle inscrit, l'exagone inscrit et circonscrit, et le triangle circonscrit, sont entr'elles comme les nombres 3, 6, 8, 12.

Le dodécagone inscrit jouit encore d'une propriété remarquable, dont nous parlerons en son lieu.

THÉORÈMES.

275. *Le quarré circonscrit au cercle est celui du diamètre. (Fig. 94.)*

276. *Le quarré inscrit est la moitié du quarré circonscrit.*

277.

277. *La surface de l'octogone inscrit est au quarré inscrit, comme le côté du quarré inscrit est au rayon.*

278. *La moitié du côté de l'octogone circonscrit est égale à la différence qui est entre le rayon, et le côté du quarré inscrit.*

Menant des tangentes aux points A, B, C, D, qui divisent le cercle en quatre parties égales, vous aurez le quarré circonscrit, qui sera visiblement celui du diamètre.

Joignant par des cordes ces quatre points A, B, C, D, il en résultera le quarré inscrit, qui est la moitié du précédent.

Le quarré inscrit est composé de huit triangles, tels que BHI. L'octogone inscrit en a huit égaux à BFI. Ces deux triangles sont entr'eux dans le rapport de leurs bases HI:FI, ou HI:BI, ou AI:AB, à cause des triangles semblables BHI et BIA. Le quarré inscrit est donc à l'octogone inscrit, comme le rayon est au côté du quarré inscrit.

Divisant en deux également l'angle BIF par la ligne IE, on aura le point E appartenant à l'octogone circonscrit, dont BE sera le demi-côté. Examinant ensuite les angles LIE et LEI, on les trouvera tous les deux égaux aux trois quarts d'un angle droit, et par conséquent égaux entr'eux. Le triangle ELI étant donc isoscèle, on aura EL=LI. Ainsi BE, demi-côté de l'octogone circonscrit, sera égal à l'excès de IL=AB, côté du quarré inscrit, sur le rayon BL.

Octo-

Octogone inscrit. Le côté est égal à la moitié de la racine quarrée de $2-\sqrt{2}$, ce qui fait en nombres 0,7654. La surface est égale à $2\sqrt{2}=2,8284$.

Octogone circonscrit. Le côté est le double de $\sqrt{2}-1$, ce qui fait 0,8284. Sa surface est égale à huit fois $\sqrt{2}-1$, ce qui fait 3,3136.

THÉORÈME.

279. *Le côté du décagone inscrit est moyen proportionnel entre le rayon, et la différence entre le rayon et le côté. (Fig. 95.)*

Soit AB la dixième partie de la circonférence du cercle dont C est le rayon. ACB alors sera un des dix triangles égaux et isoscèles qui composent le décagone inscrit. Donc, l'angle au centre C étant égal aux *deux cinquièmes* d'un angle droit, chacun des angles à la base CAB et B en fera les quatre cinquièmes. Donc, divisant l'angle A en deux également par la ligne AD, le triangle ACB se trouvera partagé dans les deux triangles ADC, BAD, isoscèles tous les deux, à cause de l'égalité de deux de leurs angles ; et dont celui-ci sera équiangle, et par conséquent semblable au triangle ACB. On en tire la proportion BD:AB=AB:BC. Mais comme les deux triangles BAD et ADC sont isoscèles, les trois lignes AB, AD et CD sont egales entr'elles. On aura donc BD:CD=CD:BC. Ainsi le côté du decagone, qui est égal à CD, sera moyen proportionnel entre le rayon BC, et BD, qui est la difference entre ces deux lignes. Reste donc à diviser le rayon en deux p[illegible]s, et telles que la plus grande

ande des deux soit moyenne proportionnelle ıtre la ligne entière et la plus petite.

PROBLÊME.

280. *Diviser la ligne donnée AB en deux arties, telles que la plus grande AE soit moenne proportionnelle entre la plus petite BE la ligne entière AB. (Fig. 96.)*

C'est ce qu'on appelle *diviser une ligne sen la moyenne et extrême raison.* Les anciens onnoient aussi à cette division l'épithète de ction *divine.*

Elevez à l'extrémité B la perpendiculaire BC égale à la moitié de AB; portez CB de C n D, et ensuite AD de A en E. La ligne D sera divisée en E selon la *moyenne et exème raison.*

Démonstration. Du centre C, avec le rayon B, décrivez la demi-circonférence de cercle BF, dont AB sera tangente, et ADF sécante. a tangente AB, égale au diamètre DF, parce que l'une et l'autre est le double de BC, sera oyenne proportionnelle entre AF, sécante, t. AD, qui est sa partie hors du cercle; insi on aura AD:AB=AB:AF, ou AD:DF= DF:AF; la ligne AF sera donc divisée selon la oyenne et extrême raison au point D. Preant les différences des antécédens et des conéquens, on aura AB—AD:AF—AB=AD:AB, ou BE:AE = AE:AB; ce qui fait précisément a condition du problème.

Supposons BC=1, on aura AB=2; le quarré de l'hypoténuse AC sera 5; ainsi AC=$\sqrt{5}$; et

AE

AE=$\sqrt{5}-1$, tandis que BC=$3-\sqrt{5}$. En faisant le quarré du moyen et le produit des extrêmes, on pourra facilement s'assurer que les trois nombres 2, $\sqrt{5}-1$, $3-\sqrt{5}$ sont en proportion continue.

Comme la racine quarrée de 5 est 2,236068; on voit que pour diviser l'*unité* selon la moyenne et extrême raison, il faudra en faire les deux parties 0,618034 et 0,381966.

Cette division numérique donne lieu à une progression très-remarquable, dont nous allons exposer les principes.

Soient A, B, C, D quatre nombres tels, que les deux premiers A et B étant pris à volonté, chacun des deux C et D soit la somme des deux qui le précèdent; tellement que C=B+A, et D=C+B. Je dis que l'excès du quarré de B sur le produit AC, sera égal à l'excès du quarré de C sur le produit BD, mais pris en sens contraire.

En effet, ayant par supposition C—A=B, et D—B=C, les deux produits (C—A)C et B(D—B) seront absolument identiques, l'un et l'autre étant BC. On aura donc CC—AC=BD—BB. Ajoutant de part et d'autre BB—CC, il en résultera BB—AC=BD—CC, ce qui étoit précisément le théorème à démontrer.

Cela étant, si l'on continue la progression A, B, C, D, en faisant toujours chacun de ses termes égal à la somme des deux qui le précèdent, le théorème précédent continuera d'avoir lieu, de manière qu'il y aura entre le quarré de chaque terme, et le produit des deux termes entre lesquels il se trouve placé, une différence constante, et égale à celle qui existoit entre le quarré du second terme B, et le produit du premier et du troisième A et C.

Cette différence restant la même, tandis que les produits eux-mêmes sont d'autant plus grands, que les termes qu'ils ont pour facteurs, sont éloignés du commencement de la série, il est visible que le rap-

rapport de ces deux produits doit approcher insensiblement de l'unité. Ainsi, prenant trois termes consécutifs de la progression, désignés par P, Q, R, ces trois termes formeront une proportion continue d'autant moins défectueuse, que les termes P, Q, R, seront plus éloignés du commencement de la série.

Comme les deux premiers termes A et B peuvent être pris à volonté, supposons A=0, B=1. Il en résultera la progression 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584 etc. Si l'on en prend trois termes consécutifs quelconques, la différence entre le produit des extrêmes et le quarré du moyen sera constamment égale à *un* Prenant les nombres 55, 89, 144, le produit des extrêmes sera 7920, et le quarré du moyen 7921, ainsi, en régardant ces trois nombres comme les termes d'une proportion continue, on commettra une erreur d'*un* sur 7920. Il s'ensuivra donc, qu'en régardant 55 et 89 comme les deux parties du nombre 144, divisé selon la moyenne et extrême raison, on aura commis une erreur d'*un* sur 7920; erreur qu'on pourra diminuer à volonté, en choisissant des termes plus éloignés du commencement de la série.

THÉORÈME.

281. *Le quarré du côté du pentagone inscrit au cercle, est égal au quarré du rayon, plus le quarré du côté du décagone inscrit au même cercle. (Fig. 97.)*

Soit AEFHI le pentagone inscrit au cercle, ayant son angle au centre AIE égal aux *quatre cinquièmes*, et chacun des deux angles à la base IAE et IEA égal aux *trois cinquièmes* d'un angle droit.

Di-

Divisant en deux également l'arc AE au point D, les cordes AD et DE seront les côtés du décagone inscrit au cercle : les angles au centre AID et DIE étant chacun égal à *deux cinquièmes.*

Divisez de plus l'angle AID en deux également par la droite IB, et tirez la droite CD.

Vous aurez les triangles isoscèles ACD et ADE semblables entr'eux, ayant en A le même angle à la base, CAD dans l'un, DAE dans l'autre. On en tire la proportion AC:AD=AD:AE. Le quarré de AD, côté du décagone, sera donc égal à AE, côté du pentagone, multiplié par AC.

Le triangle ECI aura chacun de ses deux angles en E et en I, égal aux *trois cinquièmes* de l'angle droit. Il sera donc isoscèle, de même que le triangle EIA, lequel ayant les mêmes angles à la base, lui sera semblable. On en tire la proportion EC:EI=EI:AE. Le quarré du rayon EI sera donc égal à AE, côté du pentagone, multiplié par CE.

Les deux produits auront AE pour facteur commun; et la somme de leurs autres facteurs AC+CE sera encore AE. Ainsi le quarré du côté du pentagone sera égal au quarré du rayon, plus le quarré du *côté du décagone.*

PROBLÊME.

282. *Construire géométriquement le côté du décagone, de même que le côté et la diagonale du pentagone, inscrits au cercle.* (*Fig.* 98.)

Ayant

Ayant tiré le diamètre HF, et élevé dans le centre la perpendiculaire BA, divisez le rayon en deux également en C; du centre C et du rayon CA décrivez le demi-cercle GAI, et tirez les lignes AG et AI. Cela étant :

1. BG sera le côté du décagone.
2. AG sera le côté du pentagone.
3. AI sera la diagonale du pentagone.

Démonstration. D'après la construction que nous venons d'enseigner, le rayon doit nécessairement être divisé selon la moyenne et extrême raison. Comparant cette construction à celle de 280 *(Fig.* 96.*)*, on voit dans les deux, la ligne BC, égale à la moitié de AB, et perpendiculaire à son extrémité; et AD égale à l'excès de l'hypoténuse du triangle ABC sur la hauteur BC. Cette ligne AD sera donc la majeure partie du rayon divisé selon la moyenne et extrême raison; et comme elle est égale à BG, le rayon BF sera divisé de même au point B; ainsi BG sera le côté du décagone. (279.)

Le quarré de AG, hypoténuse du triangle ABG, à la somme des quarrés de AB et de BG, la ligne AG sera le côté du pentagone(281).

Comparant le triangle FAH au triangle AID *(Fig.* 97.), on les voit isoscèles tous les deux, ayant leur angle au sommet égal à *deux cinquièmes*, et chacun des deux angles à la base, égal à *quatre cinquièmes* de l'angle droit. Ces deux triangles seront donc semblables; et fourniront la proportion: *le côté du décagone est au rayon, comme le côté du*

du pentagone à sa diagonale. Mais dans la *Fig.* 98. les triangles semblables GBA et GAI donnent cette autre proportion : BG, *côté du décagone*, est à AB, *rayon ;* comme AG, *côté du pentagone*, est à AI. Ainsi AI, quatrième terme de la proportion, sera la diagonale du pentagone.

Appliquant le calcul à ces données, on trouve la *surface du pentagone inscrit*, égale aux cinq huitièmes de la racine quarrée de $10+2\sqrt{5}$; ce qui fait 2,37764.

La *surface du pentagone circonscrit*, égale à cinq fois la racine quarrée de $5-2\sqrt{5}$; ce qui fait 3,632712.

La *surface du décagone inscrit*, égale à cinq quarts de la racine quarrée de $10-2\sqrt{5}$; ce qui donne 2,938927.

La surface du décagone circonscrit, égale à deux fois la racine quarrée de $25-10\sqrt{5}$, ou à 3,2492; le quarré du rayon étant par-tout supposé égal à l'unité.

THÉORÈME.

283. *La moyenne proportionnelle entre le polygone inscrit et circonscrit d'un même nombre de côtés, est le polygone inscrit d'un nombre de côtés double.* (*Fig.* 96.)

Soit BD, perpendiculaire sur AI, le demi-côté d'un polygone inscrit; AE sera le demi-côté de son polygone circonscrit; et AB le côté entier du polygone inscrit d'un nombre de côtés double. Ces trois polygones seront, quant à [illegible]es, dans le rapport des tri-

iangles AMI, ABI, AEI; et comme ces tri-
ıgles ont la même hauteur, ce rapport sera
elui des bases IM, IB, IE; ou bien IM,
A, IE, à cause de IA=IB. Mais de ces
ois lignes, IA est moyenne proportionnelle
ıtre IM et IE (208). Donc le polygone in-
:rit, qui a pour côté la corde AB, est mo-
en proportionnel entre les polygones inscrit
t circonscrit, dont les côtés sont BC et EF.

C'est ainsi qu'ayant trouvé en (273) les surfaces es exagone inscrit et circonscrit, on n'a qu'à tirer . racine quarrée de leur produit, pour trouver celle u *dodecagone inscrit;* elle sera égale à trois fois quarré du rayon.

Les surfaces des octogones inscrit et circonscrit ous feront trouver celle du polygone de *seize* côtés ıscrit au cercle; elle sera égale à 3,0614672.

Les surfaces enfin des décagones inscrit et cir-nscrit, trouvées en (282) donneront celle du poly-ıne inscrit de *vingt* côtés; elle sera 3,09017.

THÉORÈME.

284. *L'arc BH étant supposé égal à la oitié de BHG, si de l'extrémité A du dia-ètre AB on tire les cordes AH et AG, le quar-: de cette corde AH sera égal au produit du ıyon AC, multiplié par la somme des deux gnes AB+AG.* (*Fig.* 98.)

Tirez les cordes BG, BH, GH; abaissez la erpendiculaire IIF; menez la tangente HD ısqu'à la rencontre de la corde AG prolongée.

L'angle en D devant être un angle droit, s quatre triangles rectangles BFH, HEB,

Les angles DEF et DCI sont égaux entr'eux, parcequ'ils ont tous les deux pour mesure la moitié de l'arc AD ou CD, l'un comme angle au centre, l'autre comme angle à la circonférence. Les triangles rectangles DEF et DCI seront donc semblables, et donnent la proportion CI:CD=EF:ED, c'est-à-dire, comme l'apothème EF est au rayon.

Ainsi, la somme des deux cordes extrêmes, est au double de la corde moyenne, dans un rapport constant et indépendant de la position du point B sur la circonférence : et ce rapport est celui de l'apothème au rayon.

288. *Corollaire I.* Si l'on suppose le rayon égal à l'unité, et qu'on désigne par la lettre n, *le double de l'apothème*, on aura $BA+BC=n\times BD$.

289. *Corollaire II.* Réciproquement, on aura $BC=n\times BD-BA$. Ainsi les deux cordes BA et BD feront immédiatement trouver la troisième BC.

290. *Corollaire III.* Donc, s'il y a une suite d'arcs égaux en progression arithmétique, SA, SB, SC etc. (*Fig.* 100) et qu'en supposant toujours le rayon égal à l'unité, on désigne par n, le double de l'apothème de l'arc qui est la différence de la progression, on aura :

$$SC=n\times SB-SA;$$
$$SD=n\times SC-SB;$$
$$SE=n\times SD-SC;$$
$$SF=n\times SE-SD; \text{ etc.}$$

291. *Corollaire IV.* Donc enfin, les arcs croissant ou décroissant en progression arithmétique, leurs cordes formeront ce genre de suites, que nous nommons en analyse *suites récurrentes*, et dont nous traiterons en son lieu.

CHAPITRE DIXIEME.

LA QUADRATURE DU CERCLE.

Plus le polygone régulier inscrit au cercle a de côtés, et plus il approche du cercle. On n'a qu'à comparer entr'eux le triangle et l'exagone, le quarré et l'octogone, le pentagone et le décagone, pour s'assurer, qu'en doublant le nombre des côtés d'un polygone régulier inscrit au cercle, on aggrandit son angle interne, son apothème, son périmètre et sa surface, et on diminue l'espace intercepté entre le contour du polygone et la circonférence du cercle. S'il étoit possible de répéter jusqu'à l'infini cette duplication des côtés du polygone, on verroit son apothème devenir égal au rayon; son angle interne disparoitre entièrement, l'espace entre le cercle et le contour du polygone s'évanouir; ce contour se trouveroit confondu avec la circonférence du cercle, et la surface du polygone confondue avec l'espace circulaire dont elle faisoit partie. Le cercle lui-même peut être considéré comme un polygone régulier d'un nombre infini de côtés.

La

La surface du cercle est plus grande que celle de tout polygone régulier dont la circonférence est égale à la sienne. Le théorème que nous allons démontrer, nous conduira à cette vérité.

THÉORÈME.

292. *De deux triangles ACD et FCE, dont l'un est isoscèle et l'autre rectangle, et qui ayant l'angle C de commun entr'eux, ont les bases AD et FE, opposées à cet angle, égales entr'elles, le triangle isoscèle ACD est toujours plus grand que le triangle rectangle FCE, dans le rapport de 2FL à FE.* (*Fig.* 101.)

Les triangles étant entr'eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, le triangle rectangle FCE sera au triangle isoscèle ACE, comme FE×FC est à AD×BC. Les bases AD et FE ayant été supposées égales entr'elles, ce rapport sera le même que FC:BC. Les triangles semblables ABC et LFC, en fournissant la proportion LF:FC=AB:BC, réduiront encore ce rapport à LF:AB. Doublant les deux termes, on aura 2LF:AD ou 2LF:FE. Ainsi le triangle rectangle FCE sera à l'isoscèle ACD, comme 2LF:FE. Reste donc à prouver que FE est plus grand que 2LF.

L'angle FCE étant divisé en deux parties égales par la ligne LC, on aura FL:LE=FC:CE. Or l'oblique CE est plus grande que la perpendiculaire CF. Ainsi LE étant aussi plus grande que FL, il s'ensuivra que FE est aussi plus grande que 2FL.

Le

Le triangle isoscèle est donc plus grand que le triangle rectangle, dans le rapport de 2FL:FE.

THÉORÈME.

293. *De deux polygones réguliers, qui ont des contours égaux entr'eux, mais dont l'un a un nombre de côtés double de celui de l'autre, ce dernier sera le plus grand, dans le rapport énoncé dans le théorème précédent.*

Comparant cette figure à celle de 96, il est visible que FE pourra être considéré comme le *demi-côté* d'un polygone régulier qui comprendroit autant de triangles, parfaitement égaux au triangle FCE, que la circonférence entière contiendroit d'angles, égaux à l'angle FCE. La ligne CE seroit le rayon du cercle circonscrit à ce polygone, et CF en seroit l'apothème.

La ligne AD seroit le *côté entier* d'un autre polygone régulier, qui comprendroit autant de triangles parfaitement égaux au triangle isoscèle ACD, que le premier en avoit contenu d'égaux au triangle rectangle FCE. La ligne CA ou CD seroit le rayon du cercle circonscrit à ce polygone, et BC en seroit l'apothème.

Les deux polygones devant être entr'eux dans le rapport des triangles FCE et ACD, le dernier, ayant visiblement un nombre de côtés double de celui du premier, seroit donc plus grand que lui, dans le rapport 2FL:FE.

Ainsi,

Ainsi, à contour égal, le polygone régulier qui a deux fois plus de côtés qu'un autre, sera toujours le plus grand des deux.

THÉORÈME.

294. *La surface du cercle est plus grande que celle d'aucun polygone régulier, dont la circonférence seroit égale à la sienne.*

Ce théorème est une conséquence nécessaire de ce que le cercle doit être considéré comme un polygone régulier, d'un nombre de côtés infiniment grand.

Le cercle étant compris dans la définition générale des polygones réguliers, aura toutes les propriétés qui ont été généralement démontrées pour ces derniers. En conséquence:

295. Tous les cercles quelconques sont semblables entr'eux.

296. Les secteurs de différens cercles, formant au centre des angles égaux entr'eux, sont aussi semblables entr'eux.

297. Les circonférences de cercles différens, de même que les arcs qui soûtendent des secteurs semblables, sont entr'eux comme les rayons de ces cercles.

298. Les surfaces des cercles, de même que celles des secteurs circulaires semblables, sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres.

299. La surface du cercle est égale au roduit de sa circonférence par la moitié du ayon; ou bien au produit de la demi-circonérence par le rayon.

300. La surface d'un secteur circulaire est gale au produit de son arc par la moitié du ayon, ou au produit de la moitié de l'arc ar le rayon.

PROBLÊME.

301. *Le rayon du cercle étant supposé gal à l'unité, trouver la longueur d'un arc, ont la corde est donnée.*

La Géométrie que nous traitons, ne peut ésoudre ce problème que par approximation. ette solution est déjà comprise dans le théème (284), chapitre précédent. Connoissant la orde BG de l'arc dont on demande la lonueur, vous ôterez le quarré de cette corde e 4, quarré du diamètre; il restera le quarré de AG. L'extraction de cette racine vous yant fait connoitre cette corde AG, vous y jouterez *deux*, et tirant la racine quarrée e la somme, vous aurez AH. Vous ajouterez ncore *deux* entiers, et tirant la racine quarée de la somme, vous aurez AL. Tirant enore la racine quarrée de 2+AL, vous aurez K. Vous approcherez insensiblement du diaètre, et après cinq ou six extractions de acine quarrée, vous obtiendrez deux valeurs onsécutives de AM ou AN, qui ne différeont entr'elles que dans la quatrième ou dans sixième décimale. Alors, si vous jugez

cette

cette erreur assez petite, pour être négligée, vous ôterez 2+AM, qui est le quarré de AN, de *quatre*, quarré du diamètre; il restera le quarré de BN, dont la racine sera la petite corde BN; laquelle étant supposée égale à l'arc qu'elle soûtend, et doublée autant de fois de suite que vous aurez eu de racines à extraire, vous fera connoitre la longueur de BHG, dont la corde est la droite donnée BG.

Le problême suivant nous donnera un exemple de ce procédé.

PROBLÊME.

302. *Trouver le rapport du diamètre à la circonférence; ou bien, le rayon étant supposé égal à l'unité, trouver la demi-circonférence.*

Le chapitre précédent nous a fait connoitre les côtés du triangle et de l'exagone, du quarré et de l'octogone, du pentagone et du décagone régulier, et leurs rapports avec le rayon du cercle circonscrit, qui dans tous les calculs de cette espèce, est supposé égal à l'unité. Ainsi, choisissant le côté d'un de ces polygones, le problème précédent nous fera trouver la longueur de l'arc qu'il soûtend, lequel multiplié ensuite par le nombre très-connu qui exprime son rapport à la demi-circonférence, fera trouver cette dernière.

On choisit de préférence l'exagone, parceque son côté est juste égal au rayon, et que l'arc qu'il soûtend est le tiers de la demi-circonférence.

Ainsi, (*Fig.* 98) prenant l'arc BG égal au tiers de la demi-circonférence, nous le diviserons en deux également

ment en H; nous diviserons l'arc BH en deux également en I; l'arc BI en deux également en K; l'arc BK en deux également en L, et ainsi de suite.

Calculons d'abord la suite des cordes AG, AH, AI, AK, AL etc. chacune jusqu'à douze décimales. Cela suffira pour trouver à six décimales le rapport du diamètre à la circonférence.

Le rayon égal au côté de l'exagone BG, étant 1, le quarré de AG sera égal à trois fois le quarré du rayon: la corde AG sera donc égale à la racine quarrée de 3; ainsi AG=1,732050 807569.

La seconde de ces cordes AH sera la racine quarrée de 2+AG: égale à 1,931851 652578.

La troisième AI sera la racine quarrée de 2+AH; ce qui se réduit à 1,982889 722747.

La quatrième AK sera la racine quarrée de 2+AI; ce qui se réduit à 1,995717 846477.

La cinquième AL sera la racine quarrée de 2+AK: cette corde sera égale à 1,998929 174952.

La sixième AM sera la racine quarrée de 2+AL; on trouvera cette corde égale à 1,999732 275819.

La septième AN sera la racine quarrée de 2+AM; elle sera trouvée égale à 1,999933 067835.

La huitième AO sera la racine quarrée de 2+AN; elle sera égale à 1,999983 266889.

La neuvième AP sera la racine quarrée de 2+AO: on la verra égale à 1,999995 816718

Des cordes qu'on vient de trouver, on passera immédiatement au calcul des cordes BG, BH, BI, BK etc., calcul facile, parceque la somme des quarrés BH^2 et AH^2, BI^2 et AI^2, BK^2 et AK^2 etc. est par-tout égale à *quatre*.

La

La première de ces cordes BG, comme côté de l'exagone régulier, est égale à l'unité.

La seconde BH est la racine quarrée de 2—AG; elle se trouvera égale au nombre 0,517638 090205.

La troisième BI sera la racine quarrée de 2—AH; on la trouvera égale à 0,261052 384440.

La quatrième BK sera la racine de 2—AI; égale à 0,130806 258460.

La cinquième BL sera la racine de 2—AK; égale à 0,065438 165543.

La sixième BM sera la racine de 2—AL; égale à 0,032723 463253.

La septième BN sera la racine de 2—AM; égale à 0,016362 279208.

La huitième BO sera la racine de 2—AN; égale à 0,008181 208052.

La neuvième BP, sera la racine de 2—AO, égale à 0,004090 612582.

La dixième BQ sera la racine 2—AP; égale à 0,002045 307361.

Toutes les cordes qu'on vient de trouver, sont les côtés des polygones, inscrits au cercle. Les *demi-circonférences* de ces polygones sont égales à 3 BG, 6 BH, 12 BI, 24 BK, 48 BL, 96 BM, 192 BN, 384 BO, 768 BP, 1536 BQ. Ainsi, les *nombres* de côtés inscrits au *demi-cercle* étant ceux de la première colonne, on trouvera par de simples multiplications, ceux de la seconde, qui expriment leurs *contours*:

3	3,000000	100000
6	3,105828	541230
12	3,132628	613280
24	3,139350	203112
48	3,141031	950960
96	3,141452	473344
192	3,141557	608704
384	3,141583	887360
768	3,141590	435328
1536	3,141592	031232

Les

Les deux derniers demi-polygones ne diffèrent plus entr'eux que de *seize dix-millionièmes*. Et comme les différences de ces nombres vont visiblement en décroissant, de manière que le dernier de ces demi-polygones doit moins différer de la demi-circonférence de cercle, qu'il ne diffère du demi-polygone qui le précède immédiatement, on peut donc assurer que, le rayon étant supposé égal à l'unité, la demi-circonférence est 3,141592, sauf les décimales qui viennent après la sixième.

Telle est donc la méthode qu'enseigne la Géométrie élémentaire, pour trouver le rapport du diamètre à la circonférence. On peut de cette manière en trouver autant de décimales qu'on veut, mais il faut employer dans toutes les extractions de racine quarrée, au moins deux fois autant de décimales, que le rapport demandé doit avoir.

On peut apporter plus de précision à cette recherche, en y faisant entrer la considération des *polygones circonscrits* au cercle, que la connoissance des cordes AG, AH, AI etc. rend de la plus grande facilité. Il a été démontré en (267), que le côté du polygone inscrit est au côté du polygone circonscrit, et par conséquent aussi le contour du polygone inscrit à celui du polygone circonscrit, comme la corde supplémentaire AG est au diamètre AB (*Fig.* 98). On n'aura donc qu'à augmenter les demi-contours des polygones inscrits qu'on vient de trouver, dans les rapports successifs AG:2, AH:2, AI:2, AK:2, AL:2, pour avoir les demi-contours des polygones circonscrits. La petite table suivante présente les résultats de ces calculs, réduits à *sept* décimales; ce sont les seules sur lesquelles on peut compter, après avoir borné à *douze* l'extraction de ses racines quarrées. On voit dans sa première colonne, les nombres des côtés des *demi-polygones*, inscrits et circonscrits au *demi-cercle*; et dans les deux autres, leurs contours respectifs.

3	3,0000000	3,4641016
6	3,1058285	3,2153903
12	3,1326286	3,1596600
24	3,1393502	3,1460862
48	3,1410320	3,1427146
96	3,1414525	3,1418731
192	3,1415576	3,1416630
384	3,1415839	3,1416102
768	3,1415904	3,1415970
1536	3,1415921	3,1415987

La demi-circonférence du cercle tient le milieu entre deux demi-polygones inscrit et circonscrit d'un même nombre de côtés ; mais elle n'en est cependant pas la moyenne arithmétique. L'analyse nous apprend, qu'il faut ajouter à la première, non la moitié, mais *le tiers de leur différence*, pour avoir la valeur très-approchée de la demi-circonférence du cercle. On va voir dans la table suivante les résultats qu'on aura.

3	3,1423491
6	3,1416391
12	3,1415955
24	3,1415929
48	3,1415927
96	3,1415927
192	3,1415927
384	3,1415927
768	3,1415927
1536	3,1415927

Les cinq derniers nombres de cette table, absolument égaux entr'eux, prouvent que le rayon étant supposé égal à l'unité, la demi-circonférence est 3,1415927 sans qu'il y ait l'erreur d'*un* dans la septième décimale. On voit aussi, qu'eu égard à-la-fois aux polygones inscrits et circonscrits, et en ajoutant au premier le tiers de la différence qui est entre les deux, il suffisoit d'avoir inscrit au demi-cercle 96 cordes égales, et qu'on pouvoit se dispenser d'aller plus loin. Mais aussi la démonstration de cette règle excède déjà les bornes de la Géométrie élémentaire.

Le

Le rapport 1 : 3,1415927 se réduit successivement des rapports plus simples ; on y parvient en employant la méthode des diviseurs dont nous avons rlé dans nos Élémens d'Arithmétique. On en re- e les quotiens successifs 3, 7, 15, 1 ; d'où il ré- lte les rapports suivans :

1	:	3
7	:	22
106	. . .	333
113	. . .	355

De tous les nombres qui ne sont pas plus ands, ceux-ci expriment le plus exactement pos- ble le rapport du diamètre à la circonférence. ouloir en chercher d'autres et de meilleurs, c'est se ontrer fort ignorant dans les principes de la science.

Archimède s'occupa le premier de cette recherche nportante : il y employa le polygone inscrit et cir- nscrit de 96 côtés chacun. Il trouva que ce rap- ort devoit être renfermé entre les limites 7 : 22 et 1 : 223. Le premier revient à 3,1428 ; l'autre à ,1408. Ils diffèrent du véritable rapport, l'un de *ouze dix-millièmes* par excès ; l'autre de *huit dix- illièmes* par défaut.

Long-tems après lui, *Ludolph van Ceulen*, Alle- and de naissance, mort à *Leyden*, en 1610, pous- a ce même calcul jusqu'à 34 décimales.

Adrien Métius, Géomètre de *Franeker*, mort n 1635, se fit une autre espèce de mérite, par la écouverte des nombres 113 : 355 ; mérite bien ible aujourd'hui, mais qui en étoit un dans son ems. Ce rapport donne la circonférence égale à ,1415929 le diamètre étant supposé égal à l'unité ; insi l'erreur par excès qui en résulte, n'est que de *rois* sur *dix millions*.

En admettant les racines quarrées des nombres ui ne sont pas des quarrés parfaits, admissibles n Géométrie, mais que l'Arithmétique exclut omme *incommensurables*, ledit nombre sera repré- senté

senté fort exactement par les *trois cinquièmes* de $3+\sqrt{5}$. Cela fait 3,14164; on aura donc une erreur *par excès* égale à *cinq* sur *cent mille*.

Il en résulte la construction suivante pour trouver la longueur de la circonférence, quand le diamètre est donné. (*Fig.* 102.) Faites AB égale au diamètre; élevez en B la perpendiculaire BC, égale au rayon; joignez AC, et portez AB de A en D. Alors, si vous ajoutez à BC, la cinquième partie de CD, vous aurez la longueur d'un arc, égal à un sixième de la circonférence.

Réciproquement, la demi-circonférence étant supposée égale à *un*, le rayon sera égal aux *cinq douzièmes* de $3-\sqrt{5}$.

303. Nous pouvons donc mettre le rapport du diamètre à la circonférence, au nombre des quantités entièrement connues, et nous régarderons comme résolus, ou comme susceptibles de l'être, tous les problèmes qui en dépendent.

304. Nous désignerons ce nombre 3,1415927 par la lettre greeque π; elle lui sera consacrée par la suite. La demi-circonférence sera donc égale au rayon, multiplié par π. La surface du cercle, égale à la demi-circonférence multipliée par le rayon, sera égale au quarré du rayon, multiplié par π. Le quarré du diamètre sera donc à la surface du cercle, comme $4:\pi$; et le diamètre sera au côté d'un quarré qui est égal à la surface du cercle, comme $2:\sqrt{\pi}$.

Le quarré du diamètre sera donc à la surface du cercle, comme 14 : 11, si on suppose, d'après Archimède, que le diamètre est à la circonférence comme 7:22.

Le

Le diamètre est au côté d'un quarré égal à la surface du cercle, comme 1 : 0,886227, rapport qui se réduit successivement à ceux de 9:8, de 35:31, de 44 : 39, enfin de 167 : 148.

PROBLÊME.

305. *Trouver la longueur d'un arc de cercle BFD ; de même que la surface d'un secteur circulaire BADF, et celle du segment BFD. (Fig. 103.)*

Solution.

L'angle au centre A étant exprimé en parties de l'angle droit, il faut faire la proportion : l'unité est à l'angle droit, comme le quart de circonférence est à la longueur de l'arc BFD. Cet arc sera donc égal au rayon, multiplié par $\frac{1}{2}\pi$ A.

Le secteur circulaire BAD est égal à la moitié du produit de l'arc par le rayon ; il sera donc égal au quarré du rayon, multiplié par $\frac{1}{4}\pi$ A.

Le segment est égal à l'excès du secteur BADF sur le triangle BAD. Ce dernier est égal à la moitié du rayon, multipliée par la hauteur DE. Le segment sera donc égal à la moitié du rayon, multiplié par l'excès de l'arc BFE sur la perpendiculaire DE, ou BFD—DE.

CHAPITRE ONZIEME.

LES PLANS.

DÉFINITIONS.

306. Dès le commencement de cet ouvrage nous avons fait sentir que par le terme d'*angle*

on désignoit l'inclinaison d'une ligne droite vers une autre, ou vers une surface plane, ou l'inclinaison mutuelle de deux surfaces planes.

307. L'angle dont nous nous sommes occupés jusqu'ici, ayant exprimé l'inclinaison mutuelle de deux lignes droites, nous emploierons dorénavant, pour le distinguer des deux autres, le terme d'*angle linéaire*. Nous nommerons *angle plano-linéaire* l'inclinaison d'une ligne droite vers une surface plane: et *angle plan* l'inclinaison mutuelle de deux surfaces planes.

D'après l'exemple donné par *Euclide*, presque tous les Géomètres ont nommé *angle plan* celui que nous nommons *angle linéaire*, et qui exprime l'inclinaison de deux lignes droites. Ni *Euclide* ni aucun de ses successeurs, n'ont jamais songé à désigner par un terme particulier l'inclinaison mutuelle de deux surfaces planes. Les modernes enfin en ont senti la nécessité; et pour exprimer cet angle, ils ont proposé, tantôt le terme d'*angle dièdre*, tantôt celui de *coin*. Quant à l'angle *plano-linéaire*, jamais il n'a été proposé de lui donner un nom. Peut-être les dénominations très-précises d'*angle linéaire*, d'angle *plano-linéaire*, et d'*angle plan*, suppléeront-elles à ce défaut.

308. L'intersection commune des deux surfaces qui sont *les côtés* de l'angle plan, lui tient lieu de *sommet*. Cette intersection doit être une ligne. Prenant à volonté deux points dans cette ligne, que l'on joindra par une ligne droite, cette dernière, devant se trouver en même tems dans l'une et dans l'autre des deux surfaces, sera leur intersection commune. Le sommet de l'angle plan est donc une ligne droite.

309.

309. Comme chacune des deux surfaces ui forment l'angle plan, peut prendre une ıfinité de positions différentes, en tournant ıtour de leur intersection commune, on voit u'une seule ligne droite ne suffit pas pour éterminer la position d'un plan. Mais si on ıppose un point fixe hors de cette ligne, le lan tournant pourra être arrêté à ce point, t alors sa position sera déterminée.

310. Il faut donc au moins trois points, our déterminer la position d'un plan: encore es trois points ne doivent pas être situés en gne droite. Deux lignes droites qui se ren- ntrent, deux lignes parallèles entr'elles; un c de cercle, une courbe quelconque décrite ns une surface plane, déterminent la posi- n d'un plan, parcequ'il en résulte toujours is points, qui ne sont pas situés en ligne oite.

Pour désigner un angle plan, il faudra donc atre lettres, dont celles du milieu seront prises r l'intersection commune; et dont les deux ex- mes marqueront deux autres points quelconques, is à volonté dans les deux plans, mais hors de ur intersection commune. Les trois premières de s quatre lettres fixeront la position de l'un des eux plans, et les trois dernières détermineront la osition de l'autre.

C'est ainsi que l'angle plan désigné par les quatre ettres ABCD, sera formé par l'inclinaison mutuelle les deux plans ABC et BCD, ayant pour intersec- ion commune la ligne BC.

Pour désigner un angle plano-linéaire, il faudra galement quatre lettres; mais pour le distinguer de angle plan que ces mêmes lettres désigneroient

aussi, nous mettrons *deux fois* de suite la lettre qui marque le sommet de l'angle plano-linéaire.

C'est ainsi que l'angle plano-linéaire, désigné par les lettres ABBCD, exprimera l'inclinaison de la droite AB vers le plan BCD, qu'elle traverse au point B.

311. Une ligne droite, ou une surface plane sont *parallèles* à une autre surface plane, lorsque prolongées indéfiniment *de toutes parts*, elles ne peuvent jamais se rencontrer.

312. *Corollaire* I Lorsque deux plans parallèles sont coupés par un troisième, les deux lignes droites qui en forment les intersections communes, sont parallèles entr'elles. Car elles sont situées dans un même plan, dans lequel prolongées indéfiniment de part et d'autre, elles ne peuvent jamais se rencontrer.

313. *Corollaire* II. Les lignes parallèles, comprises entre des plans parallèles, sont égales entr'elles. Car joignant entr'eux les points d'intersection, qui se trouvent dans les deux plans, on aura un parallélogramme parfait.

314. *Corollaire* III. Deux angles linéaires, non situés dans le même plan, sont égaux entr'eux, lorsqu'ils ont leurs côtés parallèles, et dirigés dans le même sens à la fois, ou à la fois dans des sens opposés.

415. *Corollaire* IV. Et si deux de ces côtés parallèles étoient dirigés dans le même sens, et les deux autres en sens contraire, les angles linéaires compris entre ces côtés, quoique

non

non situés dans le même plan, feroient ensemble la somme de deux droits.

316. *Corollaire* V. Deux droites, comprises entre des plans parallèles, et situées dans un même plan, sont coupées en parties proportionnelles; la démonstration de (167) étant applicable ici.

317. *Corollaire* VI. Réciproquement, si les côtés d'un angle linéaire sont respectivement parallèles aux côtés d'un autre, les plans de ces deux angles sont parallèles entr'eux.

THÉORÈME.

318. *La ligne SA, perpendiculaire à deux lignes quelconques BAG et DAE, qui sont menées dans le plan MN, et qui se croisent dans son pied en A, est aussi perpendiculaire à toute autre droite, telle que CAF, qu'on peut mener par le point A, dans le même plan MN.* (*Fig.* 105.)

De part et d'autre du point A, faites AB=AG, et AD=AE; tirez les lignes BCD et GFE; ensuite, du point S menez aux six points B, C, D, E, F, G, les lignes SB, SC, SD, SE, SF, SG.

La parfaite égalité des deux triangles BAD et GAE, ayant les angles verticaux en A compris entre les côtés égaux AB=AG, et AD=AE, et traversés de plus par la ligne CAF, semblablement disposée dans l'une et dans l'autre, prouve d'abord que les lignes BD et GE, de même que AC et AF, sont égales en-

entr'elles; et que de plus on aura BC=GF, et DC=EF.

Les triangles SAB et SAG, ayant le côté SA commun entr'eux, les côtés AB et AG égaux par construction, et les angles SAB et SAG égaux par supposition, seront parfaitement égaux entr'eux; ce qui donne SB=SG. Il en sera de même des triangles SAD et SAE, qui donnent SD=SE.

Comparant enfin les triangles SBD et SGE, on trouvera les côtés de l'un égaux aux côtés homologues de l'autre; savoir BD=GE, SB=SG, SD=SE; et de plus BC=GF, DC=EF. Il s'ensuit que les lignes SC et SF sont égales entr'elles.

Ainsi la ligne SA, ayant deux de ses points A et S à égales distances des deux points C et F, sera perpendiculaire sur CAF.

Et comme il en seroit de même de toute autre ligne, menée par A dans le plan MN, il s'ensuit qu'une ligne telle que SA, perpendiculaire à deux lignes menées dans le plan, sera aussi perpendiculaire à toutes les autres qu'on peut mener dans le même plan; et par conséquent au plan entier.

319. *Corollaire* I. La perpendiculaire SA est plus courte que toute oblique, menée du point S à un point quelconque du plan MN; et elle mesure la distance de l'un à l'autre.

320. *Corollaire* II. Dans un point donné sur un plan, on ne peut mener qu'une seule per-

perpendiculaire à ce plan: et d'un point hors de lui on ne peut abaisser non plus qu'une seule perpendiculaire sur le plan.

321. *Corollaire* III. Si du point A comme centre, avec un rayon pris à volonté, on trace une circonférence de cercle dans le plan MN, tous les points de cette circonférence seront à la même distance de S.

322. *Corollaire* IV. Plus généralement, le cercle décrit dans le plan MN, qui a pour centre un point quelconque de la perpendiculaire SA, aura aussi pour centre tous les autres points de cette perpendiculaire.

323. *Corollaire* V. De deux obliques, partant du même point S, et inégalement éloignées de la perpendiculaire, la plus éloignée est la plus longue, et réciproquement.

324. *Corollaire* VI. Deux lignes, perpendiculaires au même plan, sont parallèles entr'elles.

325. *Corollaire* VII. Réciproquement, si une ligne est perpendiculaire à un plan, toute autre ligne qui lui est parallèle, sera perpendiculaire à ce même plan.

THÉORÈME.

326. *Si un angle droit, tel que SAB, tourne autour de l'un de ses côtés, tel que SA, l'autre côté AB décrira par ce mouvement un plan, perpendiculaire à SA. (Fig. 105.)*

Ce

Ce théorème est l'inverse du précédent. La ligne SA reste perpendiculaire à AB, dans toutes les différentes positions qu'elle peut prendre en tournant autour d'elle. Donc, en vertu du théorème précédent, elle sera perpendiculaire au plan entier qu'on aura fait passer par deux quelconques de ces positions. Et toutes les autres positions doivent nécessairement se trouver dans ce même plan; sans quoi il y auroit dans un même point de la même ligne droite, et dans le même plan, deux lignes différentes, et cependant perpendiculaires à cette droite; ce qui est impossible.

THÉORÈME.

327. *Soit BA perpendiculaire sur le plan MN, et EF une ligne menée dans ce plan. Si de A on mène AS perpendiculaire sur EF, la ligne BS, oblique au plan MN, sera cependant perpendiculaire sur EF.* (*Fig.* 106.)

Menez AC, parallèle à SF; par conséquent perpendiculaire sur AS, et se trouvant comme elle dans le plan MN. Cette ligne, perpendiculaire sur AB et AS à la fois, sera donc perpendiculaire sur tout le plan SAB (318). Ainsi ESF, parallèle à AC, devant être perpendiculaire au même plan, le sera à toutes les lignes qu'on pourra mener dans ce plan, et par conséquent aussi à la ligne SB.

THÉORÈME.

328. *Les mêmes choses étant supposées, la ligne SB, perpendiculaire sur SF qui est elle-même*

même perpendiculaire sur AS, fera un angle oblique avec toute autre ligne SC, qu'on pourra mener par S dans le plan MN. Et si sur AS comme diamètre on décrit une circonférence de cercle dans le plan MN, qui coupe la ligne SC en D, le triangle BSD, de même que BAS, seront tous les deux rectangles, l'un en D, l'autre en A. (*Fig.* 107.)

Abaissant du point A, et dans le plan MN, une perpendiculaire AD sur SC, la ligne BD sera pareillement perpendiculaire sur SD, en vertu du théorème précédent. Ainsi, le triangle BDS devant être rectangle en D, l'angle BSD sera nécessairement aigu, et la ligne BS sera oblique vers SC. De plus, le point D doit nécessairement se trouver sur une circonférence de cercle, décrite dans le plan des lignes AS et SD, c'est-à-dire, dans le plan MN, et ayant AS pour diamètre.

PROBLÊME.

329. *Construire graphiquement, ou dans un plan, les angles BSD, compris entre la ligne SB du théorème précédent, et les différentes lignes SD, menées par S dans le plan MN, sur lequel BA est perpendiculaire.* (*Fig.* 107.)

Ayant abaissé de B sur le plan MN la perpendiculaire BA, et mené la ligne AS, transportez le triangle rectangle SAB sur le plan du papier en SAB (*Fig.* 108.); élevez sur AS, comme diamètre, une circonférence de cercle; enfin du centre S, avec le rayon SB, dé-

décrivez une autre circonférence de cercle, qui rencontrera le diamètre SA prolongé en K; et la ligne AD au point I, que vous joindrez au point S par la ligne SI, faisant avec SD l'angle ISD. Alors, ayant transporté l'angle ASD *(Fig.* 107.*)* en ASD *(Fig.* 108.*)*, l'angle BSD, vû en perspective dans la première des deux figures, sera identiquement le même que l'angle ISD, graphiquement construit dans la seconde. Cela est fondé sur la parfaite égalité des triangles BSD, ISD; rectangles tous les deux en D (328) : ayant les côtés SB et SI égaux par construction, et les côtés SD et SD des deux figures, égaux par supposition.

330. *Corollaire* I. Comparant entr'eux les différens triangles ISD, en allant de C vers B, on leur trouvera les hypoténuses égales, depuis SK jusqu'à SB; et les bases SD, allant en croissant depuis *zéro* jusqu'à SA. Ainsi leurs angles à la base ISD, iront en décroissant, depuis le premier KSF, qui est un angle droit, la ligne SD étant alors tangente du cercle en S, jusqu'à BSA, identique avec BSA de l'autre figure.

331. *Corollaire* II. Donc, de tous les angles aigus que la ligne BS *(Fig.* 107.*)* fait avec les différentes lignes SC, menées par S dans le plan MN, en allant de S vers la perpendiculaire BA, le plus grand est l'angle droit BSF, la ligne SF étant perpendiculaire alors aux deux lignes SA et SB; et le plus petit est l'angle BSA, compris entre SB et la base SA.

THÉO-

THÉORÈME.

332. *L'angle plano-linéaire que fait la droite BS avec le plan MN, est le même que l'angle BSA, compris entre SB et la base SA. (Fig. 107.)*

Élevez en S la ligne SG, perpendiculaire au plan MN, et par conséquent parallèle à AB. L'angle plano-linéaire BSSMN est naturellement celui qui fait un angle droit avec BSG. Or, les points S, A, B, G faisant ensemble le plan SABG, l'angle BSA est précisement ce qu'il faut ajouter à BSG pour faire un angle droit. Il exprime donc l'angle plano-linéaire BSSMN.

333. *Corollaire* I. L'angle plano-linéaire BSSMN est donc le moindre de tous les angles aigus, et, pris de l'autre côté de SB, le plus grand de tous les angles obtus, que fait la ligne SB avec les lignes menées par S dans le plan MN.

334. *Corollaire* II. Une ligne fait avec tout plan qu'elle rencontre, de part et d'autre des angles plano-linéaires *contigus*, dont la somme est égale à celle de deux angles droits.

335. *Corollaire* III. Si elle traverse entièrement le plan, elle fait avec lui des angles linéaires *verticaux*, égaux entr'eux.

336. *Corollaire* IV. Si deux ou plusieurs plans parallèles entr'eux sont traversés par une ou plusieurs lignes parallèles entr'elles, et que les

les angles plano-linéaires qui résultent de ces intersections sont comparés entr'eux *deux à deux*, on les trouvera, ou égaux entr'eux, ou faisant ensemble la somme de deux angles droits, d'après que leurs côtés parallèles sont dirigés à-la-fois vers le même sens, ou à-la-fois dans des sens opposés, ou qu'il y en ait deux dirigés vers le même sens, et les deux autres dans un sens opposé. Et réciproquement.

337. *Corollaire* V. Une ligne perpendiculaire à un plan, est perpendiculaire à tout autre plan qui est parallèle à celui-ci. Et un plan perpendiculaire à une ligne, est perpendiculaire à toute autre ligne qui est parallèle à la première.

THÉORÈME.

338. *L'angle plan, compris entre deux surfaces planes DG et EF, qui ont pour intersection commune la ligne droite AB, est exprimé par l'angle linéaire, formé par les lignes BD et BE, menées dans les deux plans DG et EF, perpendiculairement à leur section commune AB. (Fig.* 109.)

L'angle plan DABE peut être considéré comme engendré par le mouvement de l'un des deux plans DAB autour de l'intersection commune AB. Pendant ce mouvement, toute ligne menée dans le plan DAB perpendiculairement à leur intersection commune, telle que BD, décrira une surface plane à laquelle l'intersection commune AB restera constamment perpendiculaire (326). Au commencement

ient de la révolution, l'un des deux plans étant ncore couché sur l'autre, les deux perpendiulaires le seront de même. Le plan DAB étant evenu perpendiculaire sur sa position primive, après avoir fait un quart de conversion utour de AB, la ligne BD aura fait un quart e conversion de son côté, et sera aussi deveue perpendiculaire à la position d'où elle étoit artie. Et dans toutes les positions intermédiaires, on verra le mouvement de la droite ntière BD, ainsi que de toute autre qui est erpendiculaire à l'intersection commune AB, bsolument simultané avec celui du plan DAB; t les deux angles du théorème, s'évanouir enemble, devenir des angles droits ensemble, et aire en même tems la somme de deux angles roits. Donc, l'un pouvant servir de mesure à l'autre, l'angle plan DABE se trouvera réduit à l'angle linéaire DBE, compris entre les eux perpendiculaires BD et BE.

Ce théorème est fertile en conséquences; ombiné avec les précédents, il nous permet l'étendre à des plans différens, mais parallèles ntr'eux, la plupart des théorèmes, concernant 'égalité des côtés et des angles comme conséuence naturelle du parallélisme des lignes, t qui n'avoient pu être démontrés jusqu'ici ue dans le seul cas où la figure étoit toujours upposée construite dans un même plan. Nous es présenterons comme corollaires.

339. *Corollaire* I. Les angles plans contius, formés par la rencontre de deux plans, ont ensemble deux angles droits. (14.)

340.

340. *Corollaire* II. Les angles plans verticaux, formés par l'intersection de deux plans, sont égaux entr'eux. (17.)

341. *Corollaire* III. Les angles externes internes du même côté, externes alternes et internes, alternes, que deux plans parallèles peuvent former avec un troisième qui les traverse, sont égaux entr'eux. (63.)

342. *Corollaire* IV. Les angles externes internes alternes, externes du même côté, et internes du même côté, que deux plans parallèles font avec un troisième qui les traverse, font ensemble la somme de deux angles droits. (63)

343. *Corollaire* V. L'angle plano-linéaire BSSMN (*Fig.* 106.), que fait la droite SB avec le plan MN, est égal à l'angle plan, compris entre le plan MN, et le plan SBF, conduit suivant la ligne SB et une autre ligne SF, perpendiculaire à SB, et située dans le plan MN (332).

344. *Corollaire* VI. Donc, si la ligne BA est perpendiculaire au plan MN, ce qui la rend perpendiculaire à toutes les lignes qu'on peut mener par son pied A dans le plan MN, tout plan conduit suivant BA, sera perpendiculaire au même plan MN.

345. *Corollaire* VII. Réciproquement, si le plan SBF fait un angle quelconque avec le plan MN, la ligne menée dans le premier des deux plans, perpendiculairement à leur intersection commune SF, fait avec l'autre un angle pla-

plano-linéaire, égal à l'angle que font les deux plans entr'eux. *(Fig.* 106.*)*

346. *Corollaire* VIII. Donc enfin, si les deux plans DG et EF sont perpendiculaires à la fois à un troisième plan MN, leur intersection commune AB sera perpendiculaire à ce même plan MN. *(Fig.* 109.*)*

PROBLÈME.

347. *Abaissant d'un point quelconque B sur le plan MN, la perpendiculaire BA, et l'oblique BS, on demande de construire graphiquement l'angle plan, compris entre le plan MN, et tout autre plan conduit suivant l'oblique SB. (Fig.* 106. 107.*)*

La position de la ligne SC étant supposée connue comme devant déterminer avec SB celle du plan dont on cherche l'inclinaison avec le plan MN, abaissez de A sur SD la ligne AD, et tirez SD. Les triangles ADS et BDS étant tous les deux rectangles en D (328), l'angle plan demandé BSDA sera exprimé par l'angle linéaire BDA (338). Cet angle appartient au triangle rectangle BDA, dont la hauteur BA est supposée connue, et qui a pour base la ligne AD, dont le quarré est égal à la différence des deux quarrés de AS et de SD (208), donnés l'un et l'autre par la nature du problême.

Donc, ayant transporté le triangle rectangle SAB sur le plan du papier en SAB *(Fig.* 108*)*, élevez sur AS comme diamètre une circonférence

rence de cercle, qui coupera en D la ligne donnée de position SD ; tirez AD et portez la du point A comme centre en H. L'angle BHA sera l'angle demandé ; il exprimera l'inclinaison du plan BSD vers le plan MN.

348. *Corollaire* I. Ainsi, en allant de A vers S, cet angle va constamment en diminuant. La ligne SD se trouvant encore couchée sur SA, ce sera un angle droit : car il sera conduit suivant BA, qui est supposée perpendiculaire sur le plan MN. Mais à mesure que la ligne SD et le plan BSD tournent, l'une autour du point S dans le plan MN, l'autre autour de la ligne BS, l'angle plan BSDN, toujours égal à l'angle linéaire BHA *(Fig.* 110*)* ira en diminuant et il aura la moindre valeur possible, lorsque la ligne SD, ayant décrit un quart de conversion autour de S, sera devenue tangente du cercle, dont le diamètre est AHS.

349. *Corollaire* II. Dans ce dernier cas, l'angle plan BSDN sera l'angle plano-linéaire même que SB fait avec le plan MN ; lequel par conséquent exprime le *minimum* de l'angle variable, que le plan MN, supposé constant, fait avec un autre plan, tournant autour de SB.

THÉORÈME.

350. *Si deux plans parallèles, tels que MN et PQ* (Fig. 111) *sont traversés, l'un aux points A, B, C, l'autre aux points D, E, F, par trois ou plusieurs lignes, partant d'un point S situé*

situé hors des deux plans, parmi lesquelles il y a aussi la perpendiculaire SGH, traversant l'un des deux en G, l'autre en H:

a. *Les lignes SA, SB, SC seront coupées aux points D, E, F proportionnellement entr'elles et à la perpendiculaire SG.*

b. *Les polygones formés par ces mêmes lignes dans les deux plans sont semblables entr'eux.*

Les côtés homologues des deux polygones seront nécessairement parallèles entr'eux, étant les intersections communes de deux plans supposés parallèles, faites par les plans SAB, SBC, SCA, qui les traversent (312).

Il faut en dire autant des lignes AG, BG, CG, ainsi que de DH, EH, FH, situées dans les deux plans, et exprimant les distances respectives de tous les angles des deux polygones à la perpendiculaire SGH.

Ainsi tous les triangles de la figure, ayant leur sommet commun en S, et pour bases les côtés ou les diagonales semblablement disposées dans les deux polygones, comparés ensemble deux à deux, seront semblables entr'eux (74). Tels sont les triangles ASB et DSE; les triangles BSC et ESF; les triangles CSA et FSD; de même que les triangles ASG et DSH; les triangles BSG et ESH; les triangles CSG et FSH.

Donc, tous les rapports SA:SD, SB:SE, SC:SF seront égaux entr'eux, et chacun de ces rapports sera celui de SG:SH (175).

pyramide triangulaire, et ses trois angles au sommet, construire la pyramide; de même que celui-ci: *inscrire un cercle d'un rayon donné dans un cône donné, droit ou oblique.* Nous verrons que chacun des deux problèmes admet *quatre* solutions différentes: et nous en tirerons la conclusion naturelle, qu'outre la section parallèle à la base, il existe encore dans toute pyramide et dans tout cône oblique *trois* autres sections, qui sans être parallèles à la base, ne lui en sont pas moins semblables.

CHAPITRE DOUZIEME.

L'ANGLE SOLIDE.

DÉFINITIONS.

352. L'*angle solide* est l'espace angulaire indéfini, compris entre plusieurs surfaces qui se rencontrent dans un point.

353. Il faut au moins trois plans, dont aucun n'est parallèle à l'autre, pour former un angle solide.

354. L'angle solide est nommé *triëdre*, *tetraëdre*, *pentaëdre*, *exaëdre*, et généralement *polyëdre*, d'après le nombre des faces qui se réunissent dans son sommet.

355. Chacune de ces faces forme au sommet un angle *linéaire*: et c'est par le concours de ces angles que se forme l'angle solide. Les angles linéaires eux-mêmes résultent de l'inclinaison mutuelle des *arêtes*, qui concourent au sommet.

356. Ces *arêtes* sont elles-mêmes les mets des angles plans, qui résultent de clinaison mutuelle des faces.

357. De chaque arête on peut me toutes les autres du même angle solide cepté les deux arêtes non-adjacentes, des diagonaux, dont le nombre par conséqu trouve, de même que celui des diag d'un polygone quelconque, en multipli nombre des faces de l'angle polyëdre, p même nombre diminué de trois (79).

358. L'angle solide est donc entièr différent de ceux que nous avons con jusqu'ici. Ces derniers, étant tous lin ou réductibles aux linéaires, étoient toi décrits dans un même plan; et l'angle li exprimoit l'inclinaison mutuelle de deux droites, situées dans un même plan. L sure de cet angle étoit l'arc décrit de sor met comme centre, et compris entre ses Cet arc étoit à la circonférence entièi même cercle, comme l'espace indéfini, cepté entre les côtés de l'angle, étoit pace entier, étendu en longueur et ei geur, qui constituoit la surface du pl l'angle, et dont le centre étoit supposé son sommet.

359. L'angle solide, d'après sa défin exprime le rapport de l'espace indéfini, pris entre ses faces, à l'espace entier, é d'après ses trois dimensions autour du met de l'angle solide, qui en est supp

cent

centre. Ici la simple circonférence de cercle devient insuffisante: et pour établir le rapport demandé, il faut employer la surface entière de la sphère, dont la considération est inséparable de celle de l'angle solide. L'angle solide est à l'angle linéaire, ce que le corps est à la surface, ou ce que la surface est à la ligne.

360. Du point S, sommet de l'angle solide SABC que nous supposerons ici *triëdre*, et avec un rayon arbitraire, décrivons dans les trois faces qui le comprennent, les trois arcs de cercle AB, BC et CA *(Fig. 112)*. En retranchant alors des faces ce qui dépasse ces arcs, les trois faces deviendront des secteurs de cercle. Il y en aura trois dans l'angle solide triëdre; savoir les secteurs ASB, BSC et CSA.

361. Les arcs de cercle AB, BC et CA, considérés de front, formeront alors ce qu'on appelle *triangle sphérique*. *(Fig. 113.)* Le triangle sphérique a donc pour côtés trois arcs de cercle, décrits d'un même centre, avec le même rayon, dans trois plans différens, concourant ensemble dans un seul point, et terminés de part et d'autre par les arêtes de ces plans. L'espace renfermé entre les trois arcs, et qui sera proprement l'aire du triangle sphérique, ne sera point une surface plane; il fera partie de la surface de la sphère entière, décrite du même centre et avec le même rayon, que les arcs de cercle eux-mêmes.

362. D'après cette construction, les angles linéaires ASB, BSC, CSA, dont les sommets ré-

unis en S forment celui de l'angle solide, auront, comme angles au centre, pour mesure les arcs compris entre leurs côtés respectifs; c'est-à-dire, les côtés même du triangle sphérique ABC.

363. Pour reconnoitre les angles plans du même triëdre, formés par l'inclinaison mutuelle de ses faces, prenons pour exemple l'angle plan CSAB, compris entre les faces CAS et BAS; et dans le point A de son arête AS, élevons deux perpendiculaires à cette arête, l'une dans le plan CAS, l'autre dans le plan BAS. Ces deux lignes, perpendiculaires en A au rayon commun des deux arcs AC et AB, seront *tangentes* de ces arcs en A (122), et confondus dans ce point avec les arcs eux-mêmes, elles expriment les directions que prennent ces arcs, en partant de A.

Ainsi l'angle plan CSAB, égal à l'angle linéaire que ces deux perpendiculaires comprennent entr'elles (338), n'est réellement autre chose que celui que les deux arcs AC et AB forment l'un avec l'autre au point A; et comme il en est de même des deux angles plans ASBC et BSCA, les trois angles plans qui concourent à former l'angle solide SABC, sont identiquement les mêmes que les trois angles du triangle sphérique ABC.

364. Il reste donc à reconnoitre dans ce même triangle sphérique ABC, les trois angles plano-linéaires, qui expriment l'inclinaison des trois arêtes du triëdre vers les faces qui leur sont respectivement opposées. Abaissons de C sur la face opposée ASB la perpendiculaire CI, et

de

; I vers S menons la droite IC. Le triangle
[S, rectangle en I, sera perpendiculaire au
au ASB (344) : son angle à la base CSI ex-
imera l'angle plano-linéaire que l'arête CS
it avec ce même plan ; et cet angle aura pour
esure l'arc CF, décrit du centre S, avec le ra-
n SC, dans le plan du triangle rectangle CSI,
perpendiculaire au côté AB du triangle sphé-
que ABC. Comme il en est de même des deux
tres, on voit que les trois angles plano-li-
aires du triëdre SABC auront pour mesure
; trois arcs du triangle sphérique ABC, abais-
; perpendiculairement de ses trois angles sur
; côtés respectivement opposés.

365. Ainsi donc, toutes les parties de l'angle
lide triëdre, savoir, ses trois angles linéaires,
; trois angles plans, et ses trois angles plano-
inéaires, se retrouvent dans le triangle sphé-
que, décrit de son sommet comme centre,
ec un rayon arbitraire, sur les trois faces du
ëdre, savoir : les angles linéaires du triëdre
ns les côtés du triangle sphérique : les angles
ns du triëdre dans les angles du triangle
hérique ; et les angles plano-linéaires du triëdre
ns les arcs perpendiculaires, abaissés de
aque sommet du triangle sphérique sur le
té opposé. Et dans tout ce qui concerne les
lations mutuelles entre ces parties, il sera
rmis de substituer au triëdre solide, le tri-
gle sphérique, qui en se présentant entiè-
ment à l'esprit et aux yeux, sans qu'aucune
ses parties soit cachée par l'autre, se prête
ec bien plus de facilité au calcul et à la dé-
onstration.

366.

366. La liaison très-étroite entre le triédre solide et le triangle sphérique est applicable à tous les angles polyëdres solides. Décrivant du sommet comme centre, avec un rayon pris à volonté, des arcs de cercle dans toutes les faces qui comprennent l'angle polyëdre, de même que dans ses plans diagonaux, et dans ceux que d'une quelconque de ses arêtes on peut abaisser perpendiculairement sur ses faces non-adjacentes, on obtiendra un polygone sphérique, dont les côtés, les angles, et les arcs perpendiculairement abaissés de ceux-ci sur les premiers, seront la mesure naturelle des angles linéaires, des angles plans, et des angles plano-linéaires, qui concourent à former l'angle polyëdre.

367. Il y aura donc des *quadrilatères sphériques*; ils répondront aux angles solides tetraëdres. Dans cette classe on verra des *quarrés sphériques*, ayant leurs quatre côtés et leurs quatre angles égaux entr'eux; des *quarrés-longs sphériques*, dont tous les angles sont égaux entr'eux, tandis que les côtés ne le sont que deux à deux; des *rhombes sphériques*, dont les quatre côtés sont égaux entr'eux, mais dont les angles ne sont égaux que deux-à-deux; des *rhomboïdes sphériques*, dans lesquels tant les côtés que les angles ne sont égaux, qu'autant qu'on compare chaque angle et chaque côté à celui qui lui est opposé; enfin des *trapèzes sphériques*; dans lesquels, en prenant un des quatre côtés pour base, les arcs perpendiculairement abaissés des deux angles

angles non-adjacens sur cette base, sont égaux entr'eux.

368. Les polygones rectilignes sont des quantités absolues, composées de côtés et de diagonales, qui sont aussi des quantités absolues. La grandeur des polygones sphériques n'est que rélative ; se rapportant sans cesse au rayon avec lequel ses côtés ont été décrits, et qui est entièrement arbitraire. L'angle solide n'est composé que de quantités angulaires ; l'inclinaison mutuelle de ses arêtes et de ses faces en détermine seule la capacité, laquelle, de même que celle de l'angle rectiligne, ne dépend nullement de la longueur des arêtes, et qui par conséquent ne peut être que rélative.

369. Mais ce qui distingue surtout les polygones sphériques des polygones rectilignes, c'est l'absence, et même l'impossibilité du parallélisme, et de tout ce qui s'y rapporte. Comme tous les côtés du polygone sphérique sont supposés décrits d'un même centre, dans lequel tous leurs plans se réunissent, l'idée du parallélisme est absolument incompatible avec celle du polygone sphérique. Par cette même raison il n'y aura jamais de triangles ni de polygones sphériques, qui soient semblables entr'eux sans être en même tems égaux : ce qui est d'ailleurs une conséquence naturelle de ce que la quantité de l'angle solide dépend uniquement de l'inclinaison mutuelle de ses arêtes et de ses faces : et que l'égalité respective des angles, qui concourent aux sommets de deux triëdres, pour les former, suffit seule pour en constater l'égalité parfaite.

370.

370. Si l'on supprime une des trois faces du triëdre SABC (*Fig.* 112.), telle que la face BC, le triëdre disparoitra, et on aura à sa place un simple angle plan, compris entre les faces CSA et BSA qu'on a laissées, et exprimant leur inclinaison mutuelle. Prolongeant indéfiniment de part et d'autre les faces de cet angle plan, de même que leur intersection commune, on le verra égal à son vertical opposé, et faisant la somme de deux angles droits avec chacun des deux angles plans qui résultent du prolongement de ses faces au-delà de SA.

371. Alors, si du point S, qu'on peut prendre à volonté sur l'intersection commune des deux plans, et avec un rayon arbitraire, on décrit un demi-cercle dans chacun de ces plans, qui sera, chacun de son côté, le prolongement d'un des deux arcs AB et AC du triangle sphérique BAC, ces deux demi-cercles se couperont mutuellement sur le prolongement de l'intersection commune AS, et dans le point de la surface diamétralement opposé au point A. Le triangle sphérique ABC s'aggrandira au point, que cessant d'être triangle, il deviendra ce qu'on nomme *fuseau sphérique:* c'est l'espace de la surface, compris entre les deux demi-cercles ABD, ACD, qui ont pour leur intersection commune AD, un des diamètres de la sphère. (*Fig.* 112. 113.)

372. Le fuseau sphérique, mesure naturelle de l'angle plan, de même que le triangle sphérique est la mesure de l'angle solide, peut être considéré comme engendré par la rélation du

du diamètre ABD autour de l'axe AD: et comme tel, il sera à la surface entière de la sphère, dans le rapport de l'angle A à la somme de quatre angles droits. Ainsi donc, par la simple suppression d'une des trois faces, l'angle triëdre sera devenu *diëdre;* et c'est là encore un caractère essentiellement distinctif entre les polygones rectilignes et les polygones sphériques, que les polygones à deux côtés seuls, ont encore leur place parmi les derniers, tandis que dans les premiers il faut au moins trois côtés pour renfermer un espace.

373. Si l'on suppose perpendiculaires entr'elles, les deux faces de l'angle dièdre, dont la mesure est le fuseau sphérique, compris entre les deux demi-cercles ACD et ABD, *(Fig. 114)* qui alors font ensemble des angles droits aux points d'intersection A et D; il est clair que l'un des deux demi-cercles, tel que ABD, en tournant autour du diamètre commun AD, doit faire un quart de révolution pour arriver dans la position ACD, et qu'ainsi le fuseau, compris entre les deux demi-cercles sera un quart de la surface de la sphire.

374. Si dans ce cas, le demi-cercle ACB étant toujours perpendiculaire sur le demi-cercle ABD, on divise l'un et l'autre en deux également aux points B et C, et que par les deux points de division et par le centre de la sphère on fasse passer un plan, qui partagera le fuseau ACDB en deux moitiés parfaitement égales; il en résultera les deux triangles sphériques ABC et DBC, ayant chacun

ses

ses trois côtés perpendiculaires entr'eux, et égaux à un quart de circonférence. L'aire de ce triangle sera égale à un *huitième* de la surface sphérique, et l'angle solide qui lui répond au centre de la sphère, sera naturellement celui, qui est formé par trois plans perpendiculaires entr'eux, et par trois arêtes aussi perpendiculaires entr'elles; et dont par conséquent tous les angles, linéaires, plans et plano-linéaires, seront des angles droits.

375. Ce triangle, que pour ces raisons on a nommé triangle sphérique tri-rectangle, et que nous nommerons simplement *orthoëdre*, est l'unité angulaire, qui se présente naturellement pour évaluer numériquement les angles solides en général: il est pour ces angles, ce que l'angle droit est pour les angles linéaires. L'angle droit diédre, formé par deux plans perpendiculaires entr'eux, et ayant pour mesure le fuseau sphérique intercepté par deux demi-cercles perpendiculaires entr'eux *(Fig. 114)* est le double de l'orthoëdre.

376. Il appartient essentiellement au cercle et à la sphère, d'être divisible l'un et l'autre en deux moitiés parfaitement égales par tout plan qui passe par leur centre. Cela étant, considérons les deux fuseaux sphériques verticalement opposés, qui résultent de l'intersection des deux cercles ABFA'B'F' et BCDB'C'D', dont le diamètre BB' est l'intersection commune, et formant aux extrémités B et B' de ce diamètre les triangles sphériques, ABC et A'B'C', égaux entr'eux. Faisons passer par le centre

centre de cette sphère un plan, qui rencontre l'une des deux circonférences aux points D, D′; et l'autre aux points F, F′. Des deux fuseaux sphériques qu'il fait avec chacun des deux cercles ABFA′B′F′ et BCDB′C′D′, deux seront sur la partie antérieure, et deux se trouveront sur la partie postérieure de la sphère. Par cette raison même, les deux fuseaux que ces deux cercles comprennent entr'eux, seront en partie sur la surface antérieure de la sphère, et par conséquent visibles; l'autre partie sera invisible, étant située sur la surface postérieure de la sphère. Les parties visibles des deux fuseaux seront les triangles sphériques DBF′ et D′BF. Les parties invisibles seront les triangles sphériques D′B′F et DB′F′, égaux et diamétralement opposés aux premiers.

377. Une conséquence naturelle du théorème qui concerne l'égalité des angles verticaux, c'est qu'en général, des parties quelconques, diamétralement opposées sur la même surface sphérique, sont égales entr'elles. Ainsi les deux triangles sphériques DB′F′ et D′BF seront égaux entr'eux, ayant pour sommets les points de la surface diamétralement opposés, D et D′, B′ et B, F′ et F. Le premier des deux, DB′F′, fait avec le triangle DBF′ le fuseau sphérique, compris entre les deux demi-cercles BDB′ et BF′B′, et qui est au quart de la surface sphérique, comme l'angle B est à l'angle droit, et à l'orthoëdre, comme 2B est à l'angle droit. Et comme l'autre D′BF doit faire la même somme avec le même triangle sphérique DBF′, il s'ensuit, que *la somme des tri-*

triangles opposés, formés par deux grands cercles qui se coupent dans un hémisphère, est égale au fuseau sphérique, que ces mêmes cercles forment entr'eux.

378. Tels sont les principes généraux sur la mesure des angles solides et des triangles sphériques qui les représentent; ils nous guideront dans la démonstration des théorèmes qui vont suivre.

THÉORÈME.

379. *L'aire d'un triangle sphérique quelconque est égale à l'excès de la somme de ses trois angles sur deux angles droits; l'orthoëdre étant pris pour unité.*

Prolongeons les trois côtés du triangle de part et d'autre jusqu'à la rencontre du cercle DFED'F'E', mené à volonté par le centre de la sphère. On trouvera alors sur son hémisphère antérieur les triangles sphériques D'CE' et DCE, faisant ensemble le fuseau, dont l'angle est C: les triangles sphériques F'BD et FBD', faisant ensemble le fuseau dont l'angle est B; enfin les triangles sphériques FAE et F'AE', faisant ensemble le fuseau sphérique dont l'angle est A. Le triangle ABC faisant partie de chacun des trois fuseaux, l'hémisphère entier sera égal à la somme des trois fuseaux, moins deux fois le triangle ABC. Mais l'orthoëdre étant pris pour unité, les trois fuseaux seront égaux à 2A, 2B, 2C; et l'hémisphère sera égal à 4. On aura donc $2A+2B+2C-2ABC=4$; et prenant la moitié de part

part et d'autre, $A+B+C-ABC=2$; c'est-à-dire $ABC=A+B+C-2$; ce qui est l'énoncé du théorème, l'angle droit étant l'unité des angles linéaires, comme l'orthoëdre est celle des angles solides.

380. *Corollaire* I. Donc, dans tout triangle sphérique, la somme des trois angles plans est plus grande que celle de deux angles droits.

381. *Corollaire* II. Et comme tout triangle sphérique est moindre que l'hémisphère dont il fait partie, la somme des angles du triangle est donc toujours moindre que celle de six angles droits.

382. *Corollaire* III. Menant d'un des angles d'un polygone sphérique des arcs diagonaux à tous les angles non adjacens, le polygone sera partagé en triangles sphériques, dont le nombre sera égal à celui des côtés, moins deux. Appliquant la démonstration qu'on vient de donner pour le triangle, on trouvera que dans le quadrilatère sphérique la somme des angles est comprise entre *quatre* et *huit* angles droits; dans le pentagone, entre *six* et *dix* angles droits; dans l'exagone entre *huit* et *douze* angles droits.

383. *Corollaire* IV. Donc, désignant par n le nombre des côtés d'un polygone sphérique, la somme de ses angles, évalués en angles droits, sera toujours plus grande que $2n-4$, et moindre que $2n$.

384.

384. *Corollaire* V. Le triangle sphérique est égal au fuseau sphérique, qui a pour angle la demi-somme des trois angles $A+B+C$, *moins* 1.

385. *Corollaire* VI. De même que la somme des angles du triangle sphérique doit être moindre que celle de *six* angles droits, celle de ses côtés doit être toujours moindre que celle de *quatre* angles droits; parceque dans ce dernier cas, le contour du polygone étant égal à la circonférence entière de la sphère, il deviendroit lui même égal à l'hémisphère entier, dont cependant il ne peut être qu'une partie.

386. *Corollaire* VII. La somme des trois angles d'un triangle sphérique n'est pas une quantité constante comme dans le triangle rectiligne; et deux angles connus ne suffisent pas pour déterminer le troisième. Mais aussi, connoissant les trois angles du triangle sphérique, ou ce qui revient au même les inclinaisons des plans qui concourant au centre de la sphère, y forment l'angle solide correspondant, on sera en état de déterminer les inclinaisons mutuelles de ses arêtes, qui sont les côtés du triangle sphérique: ce que nous verrons par les propositions qui vont suivre.

PROBLÊME.

387. *Décrire sur la surface de la sphère un triangle sphérique, dont les côtés sont donnés.*

Connoissant le rayon d'un cercle et la longueur d'un de ses arcs, on connoitra aussi la corde

corde de cet arc; et nous savons d'ailleurs que des cordes égales d'un même cercle soûtendent toujours des arcs égaux: et réciproquement. Donc, supposant que sur l'arc de cercle indéfini EF (*Fig.* 116.) dont le plan est toujours supposé passer par le centre de la sphère, il faille élever un triangle sphérique, dont les côtés soient ceux du triangle sphérique ABC (*Fig.* 113.) on prendra avec le compas l'arc AB, et on le portera de E en F. Alors, prenant avec le compas, d'abord l'arc AC, ensuite l'arc BC, on décrira des deux centres E et F, et sur la surface de la sphère, les deux arcs indéfinis *mn* et *op*, qui ne pouvant se rencontrer d'un côté de la base EF que dans un seul point G, détermineront dans ce point le sommet du triangle, et par conséquent le triangle entier EFG.

388. *Corollaire* I. Si la somme des deux côtés EG et FG avoit été égale à la base EF, le point G seroit tombé sur l'arc EF même, et tout le triangle sphérique EGF se seroit évanoui dans ce seul arc de cercle. Et si la somme des mêmes côtés avoit été moindre que la base EF, l'un des deux cercles n'auroit pas pu atteindre l'autre; leur intersection auroit été impossible, et il n'y auroit pas eu de triangle de formé.

389. *Corollaire* II. Ainsi donc dans le triangle sphérique, de même que dans le triangle rectiligne, la somme de deux côtés quelconques doit être plus grande que le troisième. Désignant les trois côtés par A, B, C, le triangle ABC

ne pourra avoir lieu qu'à condition de $B+C>A$; de $C+A>B$; et de $A+B>C$.

390. *Corollaire* III. Et comme de ces trois équations on tire naturellement $A>B-C$; $B>C-A$; et $C>A-B$, il s'ensuit que dans tout triangle sphérique, chaque côté est moindre que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence.

391. *Corollaire* IV. La construction précédente nous apprend, que lorsque les trois côtés d'un triangle sphérique sont respectivement égaux aux trois côtés d'un autre, les deux triangles seront parfaitement égaux, et qu'ainsi les angles opposés aux côtés égaux, seront égaux de même.

392. *Corollaire* V. Décrivant des mêmes centres E et F, avec les mêmes rayons circulaires EG et FG *(Fig. 116.)* les arcs indéfinis *mn* et *op* du côté opposé de la base EF, leur point d'intersection H déterminera avec la base EF le triangle sphérique EHF, lequel, en vertu de la construction précédente, aura son angle HEF égal à l'angle GEF, et l'angle HFE égal à l'angle GFE. Mais en établissant ces deux triangles sur l'arc EF comme base, les deux angles égaux en E, de même que les deux angles en F, se trouveront dans l'un à droite, et dans l'autre à gauche du sommet; ainsi les angles et les côtés respectivement égaux se succèderont dans un ordre absolument contraire. Une pareille disposition n'empêche pas la coïncidence dans les triangles rectilignes, parcequ'il n'y aura alors qu'à renverser l'un, pour le faire

faire coïncider avec l'autre. Dans les triangles sphériques, et généralement dans les figures *non-planes*, la coïncidence suppose, que l'une reçoive dans sa concavité, la surface convexe de l'autre: ce qui ne peut avoir lieu, à moins que leurs parties respectivement égales ne se succèdent selon le même sens, dans l'une et dans l'autre. De telles figures ne peuvent pas coïncider, et n'en sont pas moins égales dans toutes leurs parties.

393. *Corollaire* VI. Des figures, égales dans toutes leurs parties, mais différentes seulement dans la position de ces parties, ont été nommées *symmétriques*, pour les distinguer de celles qui sont égales par *coïncidence*. L'image d'une figure quelconque, reçue dans un miroir, lui est égale *par symmétrie*. Si sur chacun des trois côtés du triangle sphérique EGF (*Fig.* 116.) on fait la construction que dans le problême précédent on a fait sur le seul côté EF, on aura en dehors de ce triangle, trois autres triangles, qui lui seront égaux *par symmétrie*, et qui le seront entr'eux *par coïncidence*.

PROBLÊME.

394. *Décrire sur la surface de la sphère, un triangle sphérique, dont deux côtés avec l'angle qu'ils comprennent, soient égaux aux deux côtés AB et AC du triangle donné ABC (Fig.* 113.), *de même qu'à l'angle A compris entr'eux.* (*Fig.* 116.)

Ayant décrit l'arc indéfini EF dont le plan passe par le centre de la sphère, et pris avec

le compas le côté AB, portez ce côté de E en F. Décrivez l'arc indéfini EG, qui fasse avec EF un angle égal à l'angle A; et faites l'arc EG égal à l'arc AC. Joignez les points F et G: le triangle alors sera construit, et le problème résolu.

395. *Corollaire* I. La construction nous fait voir, que lorsque deux côtés avec l'angle qu'ils comprennent, sont les mêmes dans deux triangles sphériques, ces deux triangles seront égaux entr'eux, de manière que les deux angles qui restent, et le troisième côté qu'ils comprennent, seront les mêmes dans les deux triangles.

396. *Corollaire* II. Si au lieu de mener le côté EG au-dessus de la base EF, on l'avoit dirigé au-dessous de la base vers H, le triangle EHF auroit été symmétriquement égal aux deux triangles ACB et EGF.

PROBLÊME.

397. *Construire sur la surface de la sphère, un triangle sphérique, dont deux angles avec le côté qu'ils comprennent, soient égaux aux angles A et B d'un autre triangle donné ACB, de même qu'au côté AB compris entr'eux.* (*Fig.* 113. 116.)

Faites l'arc EF égal à la base AB; et décrivez dans des plans qui passent par le centre de la sphère, les arcs indéfinis EG et FG, faisant avec la base EF des angles, égaux aux angles A et B, et se rencontrant au point G de

de la surface sphérique. Le triangle EGF étant entièrement déterminé par cette construction, le problême sera résolu.

398. *Corollaire* I. Deux triangles sphériques, ayant deux angles avec le côté qu'ils comprennent, respectivement égaux entr'eux, sont parfaitement égaux; de manière que les deux côtés qui restent, et le troisième angle qu'ils comprennent, seront respectivement égaux de même.

399. *Corollaire* II. Le triangle auroit été égal par symmétrie au triangle donné ACB, si au lieu de le construire au-dessus de l'arc EF, on l'avoit construit au-dessous de cette base. Tel auroit été le triangle sphérique EHF.

PROBLÊME.

400. *Construire graphiquement les trois angles plans, et les trois angles plano-linéaires d'un triëdre, dont les trois angles linéaires sont donnés.* (*Fig.* 117.)

Soit le triëdre SABC, ayant son sommet en S, compris entre les trois arêtes SA, SB, SC; et représenté par le triangle sphérique A'B'C', dont les trois côtés circulaires sont supposés décrits du sommet S comme centre, dans les trois faces du triëdre, et avec un rayon arbitraire.

Du point A, pris à volonté sur une des trois arêtes, abaissez la perpendiculaire AO sur la face opposée BSC, et les deux perpendiculaires

laires AB et AC, sur les deux arêtes SB et SC qui la comprennent: et tirez les lignes OB, OS, OC.

Les deux triangles AOB et AOC, rectangles l'un et l'autre au point O par construction, seront perpendiculaires tous les deux au plan BSC (344). Les lignes OB et OC seront donc respectivement perpendiculaires aux arêtes BS et CS (318). Et comme les lignes AB et AC sont perpendiculaires aux mêmes arêtes, en vertu de la construction, les angles plans ASBO et ASCO seront représentés par les angles linéaires ABO et ACO (338): et l'angle plano-linéaire ASSBC sera représenté par l'angle linéaire ASO (332). Reste donc à faire sur un plan le développement graphique de ce triëdre.

Faites *(Fig.* 118.) l'angle BSC, égal à l'angle linéaire BSC que nous avons pris pour la base du triëdre; et joignez lui de part et d'autre les deux angles ASB et A'SC, égaux aux deux autres angles linéaires ASB et ASC du triëdre proposé. Ayant pris chacune des deux lignes SA et SA' égale à l'arête SA du triëdre, abaissez des deux points A et A' les perpendiculaires AB et A'C, lesquelles étant prolongées se rencontreront au point O. Ayant tiré par ce point les lignes OH et OI, parallèles aux côtés de l'angle linéaire BSC, faites BH égale à BA, et CI égale à CA'. Les angles HBO et ICO du développement seront égaux aux angles plans du triëdre, ASBO et ASCO.

Comparant les deux figures, on reconnoîtra dans le quadrilatère SBOC et les deux triangles

angles rectangles SBA et SCA′ du développement, l'identité absolue avec le quadrilatère SBOC et les deux triangles rectangles SBA et SCA du triëdre. Les deux triangles AOB et AOC de ce dernier, ayant pour hauteur commune AO, et pour leurs deux bases les lignes OB et OC, seront identiquement les mêmes que les triangles HOB et IOC du développement, après avoir fait dans ce dernier, BH=BA, et CI=CA′. Ainsi les deux lignes OH et OI de celui-ci, nécessairement égales entr'elles, exprimeront la hauteur AO du point A au-dessus de la face opposée BSC, et les deux angles du développement HBO et ICO, identiques avec les angles HBO et ICO du triëdre, exprimeront comme ceux ci, les inclinaisons des deux plans ABS et ACS vers le troisième plan BSC.

Pour exprimer l'angle plano-linéaire que fait l'arête SA avec la face opposée BSC, il faudra construire un triangle rectangle, ayant AO pour hauteur, et AS pour hypoténuse. Donc, élevant en O la perpendiculaire OQ sur OS, et portant SA de S en Q, le triangle SOQ sera le triangle rectangle dans lequel l'angle OSQ exprimera l'angle plano-linéaire que l'arête SA fait avec la face opposée. Et comme alors le troisième côté de ce triangle OQ sera identique avec la ligne AO du triëdre, les points Q, H, I seront disposés sur une circonférence de cercle, ayant O pour centre, et pour rayon, l'élevation AO du point A au-dessus de la face opposée.

401. *Corollaire* I. Les angles qu'on vient de trouver, sont ceux qui ont pour leurs sommets

mets respectifs les arêtes SB et SC; et qui sont opposés aux faces opposées elles-mêmes à ces arêtes ; savoir l'angle OBH à la face ASC ; et l'angle OCI à la face ASB.

402. *Corollaire* II. La construction nous fait connoitre sur-le-champ la relation qui doit exister entre les trois angles linéaires du triëdre, pour que deux de ses faces comprennent un angle droit entr'elles. Ainsi, étant donnés les angles linéaires ASB et CSB dont les plans doivent faire un angle droit entr'eux, le point O devant se trouver sur l'arête SB, on n'aura qu'à abaisser de B sur l'arête SC une perpendiculaire que l'on prolongera jusqu'à la rencontre du cercle, décrit du point S comme centre avec le rayon SA'. L'angle CSL sera l'angle linéaire, compris entre les arêtes de la face opposée à l'angle droit.

PROBLÊME.

403. *Connoissant deux angles linéaires d'un triëdre, avec l'angle plan compris entre leurs faces respectives, on demande de construire graphiquement l'angle linéaire de la troisième face, de même que les deux angles plans qu'elle fait avec les deux autres. (Fig.* 118.)

Faites les angles ASB et BSC égaux aux deux angles linéaires donnés; du point A pris à volonté sur l'arête SA abaissez sur SB la perpendiculaire AB que vous prolongerez au-delà de B vers O: tirez BH qui fasse avec BO un angle égal à l'angle plan qui est compris entre les deux faces données, et faites

BH

BH = BA. Du point H menez avec BS la parallèle HO qui déterminera sur le prolongement de AB le point O. De ce point abaissez sur l'arête SC la perpendiculaire OC, qui étant prolongée au-delà de cette arête, rencontrera en A′ la circonférence de cercle, décrite du point S comme centre, avec le rayon SA. L'angle A′SC sera l'angle linéaire de la troisième face, opposée à l'arête SB.

L'angle que fait cette face avec le plan BSC, sera l'angle OCI, compris entre CO et CI qu'on aura fait égale à CA′, après avoir tiré par O la ligne OI, parallèle à SC.

Si l'on demande l'angle que fait la troisième face avec l'autre des deux faces données BSA, on abaissera de M sur SB la perpendiculaire MN ; on tirera NF, qui fasse avec le prolongement de MN l'angle PNF, égal à l'angle compris entre les deux plans donnés et on fera NF égale à MN. Abaissant de F sur NP la perpendiculaire FP, on abaissera de P sur SA la perpendiculaire PQ, qu'on prolongera jusqu'à sa rencontre R avec la circonférence de cercle. Alors, menant par P la ligne PG, parallèle à SA, et faisant GQ = QR, l'angle PQG sera l'angle plan, ayant pour sommet la troisième arête SA.

D'après cette construction, les arcs AR et A′M seront égaux entr'eux. De plus, on aura OH = OI, et PF = PG. Les angles PQG, PNF ou OBH, et OCI seront les trois angles plans du triëdre, savoir, l'angle PQG se-

sera opposé à la face BSC ; l'angle PNF ou OBH sera opposé à la face A'SC ; et l'angle OCI sera opposé à la face ASB.

PROBLÈME.

404. *Connoissant deux angles plans d'un triëdre quelconque, avec l'angle linéaire qu'ils comprennent entr'eux, on demande de construire graphiquement le troisième angle plan, de même que les deux angles linéaires, opposés aux deux angles plans donnés.* (*Fig.* 118)

Soit BSC l'angle linéaire donné. Supposons de plus que les deux angles plans donnés du triëdre, exprimant les inclinaisons des deux faces adjacentes ASB et A'SC vers la face BSC, soient les angles B et C du triangle rectiligne BHC. (*Fig.* 119.) Du sommet H de ce triangle abaissons la perpendiculaire HO; elle nous fera connoitre les deux segmens de la base BO et CO. Ensuite, menons (*Fig.* 118.) la ligne indéfinie OH, parallèle à l'arête SBD, et à une distance égale à BO. Menons de même la ligne indéfinie OI, parallèle à l'autre arête SCE, à une distance égale à CO. Du point d'intersection O de ces deux parallèles, abaissons sur les deux arêtes, les deux perpendiculaires OB et OC; et tirons les deux lignes BH et CI, faisant avec les perpendiculaires BO et CO, les angles OBH et OCI, égaux aux angles donnés B et C. Les triangles BOH et COI, rectangles tous les deux en O, seront donc parfaitement égaux aux triangles BOH et COH, rectangles en O. (*Fig.* 119.)

La

La ligne SO du triëdre *(Fig.* 117.) qui répond perpendiculairement à l'arête SA, sera entièrement déterminée par la construction précédente, tellement, qu'en menant selon cette ligne SO un plan perpendiculaire au plan BSC du triëdre, ce plan doit nécessairement être dirigé selon l'arête SA, dont il restoit encore à déterminer la position. Il faudra prolonger au-delà des deux points B et C, les deux perpendiculaires OB et OC, faire BA= BH et CA'=CI *(Fig.* 118.), et mener les deux lignes SA et SA'. Les angles BSA et CSA' seront les deux angles linéaires qu'on demandoit; ils seront respectivement opposés aux arêtes SC et SB, qui sont les sommets des angles plans, représentés par les angles linéaires C et B.

PROBLÊME.

405. *Les mêmes choses étant supposées, que dans les problêmes précédens, déterminer le troisième angle plan, opposé à l'angle linéaire donné.*

Remontons au triëdre SABC *(Fig.* 117.) dont l'analyse a fourni les solutions précédentes. Du point A menons deux lignes, perpendiculaires à l'arête SA, et situées dans les deux plans SAB et SAC; et joignons leurs deux points d'intersection D et E avec les arêtes SB et SC par la ligne droite DE, située dans le plan BSC. L'angle linéaire DAE exprimera l'inclinaison des deux plans (338). Reste donc à construire le triangle DAE.

Dans

Dans les points A et A′ du développement *(Fig.* 118.*)* élevez les lignes AD, A′E, perpendiculaires aux lignes SA et SA′, jusqu'à la rencontre des deux autres aux points D et E. Joignez ces deux points par la ligne DE, et construisez le triangle D*a*E, tellement que D*a*=DA, et E*a*=EA′. Le triangle D*a*E du développement sera identiquement le même que le triangle DAE du triëdre ; l'angle D*a*E sera donc l'angle plan, opposé à la face BSC.

406. *Corollaire* I. Le plan vertical AOS *(Fig.* 117.*)*, étant conduit selon la ligne AS, qui est perpendiculaire au plan BAE en vertu de la construction (344), sera perpendiculaire à ce même plan DAE.

407. *Corollaire* II. La ligne DE, qui forme l'intersection des deux plans DAE et BSC, faisant tous les deux des angles droits avec le plan vertical AOS, sera perpendiculaire au même plan AOS (346).

408. *Corollaire* III. Ainsi la ligne SO, qui répond verticalement à l'arête AS, de même que AX, menée de A au point d'intersection X des lignes SO et DE, seront perpendiculaires toutes les deux sur DE. Et si le plan DAE tournoit autour de DE jusqu'à coïncider avec le plan BSC, la hauteur AX de ce triangle se trouveroit sur le prolongement de SO. *(Fig.* 117.*)*

409. *Corollaire* IV. Ainsi donc, les trois points S, O; *a* du développement *(Fig.* 118.*)* feront une ligne droite, perpendiculaire sur DE, base du triangle D*a*E.

THÉO-

THÉORÈME.

410. *Si du sommet H du triangle BHC dont les deux angles à la base B et C expriment les deux angles plans adjacens à la base BSC du triëdre, on décrit l'arc de cercle POR, et qu'on mène les lignes PQ, RS, parallèles à la base BOC (Fig. 119.); ces deux lignes seront entr'elles dans le même rapport que les distances respectives de chaque point de la ligne BOa (Fig. 118.) aux deux côtés de l'angle DaE; c'est-à-dire, comme les perpendiculaires XY et XZ.*

Les deux produits DS×BO et ES×CO expriment les doubles surfaces des deux triangles SXD et SXE, qui ayant la même hauteur SX, sont entr'eux comme leurs bases DX et EX. On aura donc SD×BO:SE×CO=DX:EX.

De même les deux produits aD×XY et aE×XZ expriment les doubles surfaces des triangles aXD et aXE, qui ayant la même hauteur, seront entr'eux comme ces mêmes bases DX et EX; on aura douc AD×XY:AE×YZ=DX:EX.

Comparant entr'elles les deux proportions, on en tire celle-ci : aD×XY:aE×YZ=SD×BO:SE×CO.

Substituant au rapport aD:DS celui-ci AB:AS, qui lui est égal en vertu des triangles semblables SAD et SBA; substituant de même au rapport aE:ES celui-ci A'C:A'S, qui lui est égal à cause des triangles semblables SA'E et SCA',

SCA′, et supprimant le terme commun AS ou A′S, on aura BO:CO=AB×XY:A′C×XZ.

Le rapport BO:CO est donc composé des deux rapports AB:A′C et XY:XZ; et réciproquement le rapport des distances XY:XZ sera celui des distances BO:CO, divisé par le rapport AB:A′C: ou bien, en vertu de la construction de la fig. 118, divisé par le rapport BH:CI, ou enfin *(Fig. 119.)* BH:CH.

Mais les triangles semblables BOH et PQH (Fig. 119.) donnent BO:BH=PQ:PH. Et l'on tire des triangles semblables COH et RQH la proportion CO:CH=RS:RH. Ainsi, à cause du facteur commun PH ou RH, le rapport des produits BH×PQ:CH×RS sera le même que BO:CO. Ainsi le rapport BO:CO, divisé par le rapport BH:CH, sera celui de PQ:RS.

On aura donc XY:XZ=PQ:RS. Les distances de chaque point de la perpendiculaire *a*XS, aux deux côtés de l'angle D*a*E, seront donc entr'elles comme les deux perpendiculaires PQ et RS. *(Fig. 118.)*

411. *Corollaire.* Ainsi donc, connoissant les trois angles plans A, B, C, qui composent l'angle solide en S, on déterminera de la manière suivante la position de la ligne *a*XS, dirigée du sommet de l'angle plan D*a*E au sommet du triëdre. (Fig. 118.) Ayant formé des deux angles plans B et C le triangle BHC *(Fig. 119.)*, décrit du centre H avec le rayon HO l'arc POR, et tiré les parallèles PQ et RS, on menera,

nera, à des distances respectivement égales aux lignes PQ et RS, deux lignes parallèles aux deux côtés aD et aE du troisième angle plan DaE. Leur point d'intersection se trouvera sur la ligne aXS, et en déterminera la position. Reste donc à déterminer sur cette même ligne le point S, qui sera le sommet du triëdre.

THÉORÈME.

412. *Le rapport des deux lignes DS et ES est égal au rapport DX:EX, divisé par le rapport BO:OC; dont le premier se déduit de la solution précédente, en faisant simplement la ligne DE perpendiculaire sur aXS, et dont le second est donné immédiatement par la connoissance des deux angles plans B et C.*

Les deux triangles semblables SBO et SXD donnent DX:BO=SD:SO. Et on tire des triangles semblables SCO et SXE la proportion CO:EX=SO:SE. Multipliant par ordre, et supprimant le facteur commun SO, on aura CO×DX:BO×EX=SD:SE; ce qui constitue l'énoncé du théorème.

413. *Corollaire* I. Le rapport composé qui résulte en divisant le rapport DX:EX par celui de BO:OC, peut être traduit en rapport simple, de la manière suivante. A une distance égale à BO, menez à aX une parallèle, qui rencontre aD en B′. A une distance égale à CO menez à la même aX une parallèle qui rencontre aE en C′. Tirez les ligne B′O′ et C′O″, parallèles à DE. Le rapport DX:BO se trou-

trouvera réduit alors à $aX:aO'$. Le rapport EX:CO se trouvera réduit de même à $aX:aO''$. Ainsi le rapport composé qui résulte en divisant DX:EX par BO:OC, se réduira simplement à $aO'':aO'$; et tel sera aussi le rapport DS:ES, en vertu du théorème précédent.

414. *Corollaire* II. Ainsi le problême, de construire graphiquement les angles linéaires d'un triëdre, dont on connoit les trois angles plans, sera simplement réduit au problême suivant, parfaitement accessible à la Géométrie que nous avons enseignée jusqu'ici.

PROBLÊME.

415. *La ligne DE étant donnée, déterminer sur la perpendiculaire indéfinie SX un point S, tel que les distances de ce point aux deux extrémités de la ligne DE, soient entr'elles dans le rapport de deux lignes données, tel que M:N.* (*Fig.* 118.)

Le théorème, démontré en (194), nous apprend que tous les points S en général dont la position est telle, que le rapport DS:ES soit un rapport constant, sont disposés sur une circonférence de cercle, dont le centre est sur la ligne DE, prolongée en cas de besoin.

Des deux points où cette circonférence traverse la ligne DE, l'un, que nous nommerons P, doit être entre les deux points D et E (*Fig.* 118.); l'autre que nous désignerons par Q, sera au-delà de D, sur le prolongement de DE. Et comme ces points sont soumis à la même loi

que

que les autres, on aura pour les déterminer les deux proportions qui suivent :

$$DP:EP=DS:ES=M:N;$$
$$DQ:EQ=DS:ES=M:N.$$

Ou bien

$$DP:M=EP:N;$$
$$DQ:M=EQ:N.$$

Prenant dans la première la somme et dans la seconde les différences des antécédens et des conséquens, on aura pour la détermination des deux inconnues les deux proportions qui suivent :

$$N+M:DE=M:DP=N:EP;$$
$$N-M:DE=M:DQ=N:EQ.$$

Ainsi chacune des deux inconnues DP et DQ, ou de celles-ci, EP et EQ, sera le quatrième terme d'une proportion, dont les trois autres sont donnés. Le problême rentre donc dans celui dont la solution a été enseignée en (197).

Partageant en deux également la ligne PQ, qui sera le diamètre du cercle, on aura son centre. Il ne sera pas difficile alors de marquer le point où cette circonférence traverse la ligne indéfinie SX ; le point d'intersection sera le sommet du triëdre qu'on demandoit.

Rassemblant les problêmes précédens, nous trouverons aisément la solution du problême qui suit ; c'est le plus difficile de tous ceux qu'on peut proposer sur la construction graphique du triëdre.

PROBLÈME.

416. *Connoissant les trois angles d'un triëdre, trouver immédiatement ses trois côtés.*

Soient deux de ces angles plans, les angles B et C, adjacens à la base BC du triangle BHC. (*Fig.* 119.) Ayant abaissé la perpendiculaire HO, décrivons l'arc de cercle POR, qui par ses deux intersections avec les côtés BH et CH marque les points P et R, par lesquels nous tirerons à la base BOC les parallèles PQ, RS, jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire HO.

Comme nous nous proposons de déterminer d'abord l'angle linéaire opposé au troisième angle plan, soit *a* ce dernier angle, compris entre les côtés indéfinis *a*D et *a*E. (*Fig.* 118.) Menons des parallèles à ces deux lignes, dont les distances soient respectivement égales aux lignes PQ et RS de *Fig.* 119, menons de A par le point commun d'intersection de ces deux parallèles la ligne indéfinie AXS. Cette ligne sera l'intersection commune du plan BSC du triëdre avec le plan vertical ASO, dans lequel doit être située l'arête AS, opposée au plan BSC. (*Fig.* 117.) Et si dans un de ses points X on lui mène la perpendiculaire DXE, le triangle D*a*E du développement sera semblable au triangle DAE du triëdre, dont le plan est perpendiculaire à l'arête AS.

Cela étant, prenons les lignes BO et CO du triangle BHC *Fig.* 119. : et assignons leur dans les deux triangles rectangles *a*XD et *a*XE

aXE du développement, les positions B'O' et C'O'', parallèles à la base DE. Le problême sera réduit alors à déterminer sur la ligne aXS le point S, tel que DS:ES=aO'':aO'; problême dont nous venons d'enseigner la solution. Menant ensuite les lignes DS et ES, l'angle DSE sera l'angle linéaire du triëdre, opposé à l'angle plan A. On connoitra de plus la position du plan vertical ASO (*Fig.* 117.), relativement aux trois faces du triëdre.

Les deux autres angles linéaires du triëdre, adjacens aux angles plans B et C, se trouveront facilement par la construction suivante. Construisez sur les lignes DS et ES comme diamètres, les demi-cercles, sur lesquels vous porterez, des deux points D et E, les lignes Da et Ea, de manière que DA = Da, et EA' = Ea. Menant ensuite les lignes SA et SA', qui acheveront les deux triangles rectangles SAD et SA'E, leurs angles au point S seront les angles linéaires demandés; et les triangles eux-mêmes seront identiques avec ceux du triëdre (*Ftg.* 117.) qui sont désignés par les mêmes lettres, et qui constituent ses faces, adjacentes à l'arête AS.

417. Les angles polyëdres quelconques étant toujours décomposables en triëdres, moyennant des plans diagonaux qu'on menera selon deux de ses arêtes non-adjacentes, la théorie du triëdre doit nécessairement embrasser celle de l'angle polyëdre en général. Les problêmes que nous avons proposé, suffisent en attendant pour faire voir, qu'indépendam-

ment du calcul, les constructions graphiques, fondées sur les principes géométriques les plus simples, et n'exigeant d'autre secours que celui de la règle et du compas, suffisent pour résoudre toutes les questions qui peuvent concerner l'angle solide, et qui par leur nature sont susceptibles de l'être.

CHAPITRE TREIZIEME.

LE TRIÈDRE RECTANGLE.

DÉFINITIONS.

418. Le triëdre rectangle est celui qui parmi ses trois angles plans a au moins un angle droit. Le triëdre qui parmi ses trois angles plans, a deux angles droits, peut être nommé *bi-rectangle*. Le triëdre tri-rectangle est celui que nous avons nommé *orthoëdre*.

419. A l'exemple du triangle rectangle rectiligne, je nommerai *côtés* du triëdre rectangle, ceux de ses trois angles linéaires qui comprennent l'angle droit; et *hypoténuse* celui qui est opposé à l'angle droit. De plus, je nommerai simplement *angles du triëdre* les deux angles plans, adjacens à l'hypoténuse; et je donnerai le nom de *base* à l'arête qui fait l'intersection commune des deux côtés du triëdre.

Je désignerai constamment par S le *sommet* du triëdre; par SA la *base*; et par SB et SC, les deux autres arêtes, menées par S dans le plan de la table, et faisant de part et d'autre avec SA des angles linéaires,

néaires, égaux à ceux qui constituent les côtés du triëdre. On supposera donc que l'un des deux plans qui comprennent l'angle droit, a fait un quart de conversion autour de la base SA, pour se trouver abattu sur le plan de l'autre.

PROBLÊME.

420. *Connoissant les deux côtés d'un triëdre rectangle, construire graphiquement son hypoténuse, et ses deux angles. (Fig. 120.)*

Dans un point quelconque A de la base SA élevez la ligne BAC, perpendiculaire à cette base, et rencontrant les deux autres arêtes SB et SC aux points B et O; sur ces mêmes arêtes abaissez du point A les perpendiculaires AE et AD; de ce même point comme centre, avec les rayons AE et AD, décrivez les arcs de cercle EF et DH, qui détermineront sur la base SA, les points F et H. Ensuite, ayant mené les lignes BH et CF, les angles BHA et CFH, exprimeront les angles plans du triëdre, respectivement opposés aux angles linéaires BSA et CSA.

Prolongeant au-delà de A une des deux lignes AD ou AE, telle que AD, vers I, décrivez du sommet S comme centre, avec le rayon SB, l'arc de cercle BIK, qui rencontrera DA prolongée en I, et tirez SI. L'angle CSI sera l'hypoténuse du triëdre.

Les deux problêmes étant identiquement les mêmes avec ceux de (329) et de (347), la démonstration de ces solutions, n'est pas différente de celle qui en a été donnée, en traitant des plans en général.

Les

Les arêtes SA, SB, SC des figures 106 et 107 comprennent entr'elles un véritable triëdre rectangle, ayant la ligne SA pour sommet linéaire de son angle droit; les angles BSA et CSA pour côtés, l'angle BSC pour hypoténuse; et dans lequel les faces ASD et BSD comprennent entr'elles un angle plan, égal à l'angle linéaire BDA.

Pour faciliter la comparaison entre les deux, nous avons eu soin de désigner par les mêmes lettres les points identiques des figures 106, 107, 108 et 120.

421. *Corollaire* I. Tant que les deux angles linéaires qui tiennent place de côtés au triëdre rectangle, sont aigus, la construction nous apprend que les angles plans qui leur sont opposés, sont aigus de même.

422. *Corollaire* II. Si l'un de ces deux angles linéaires, tel que ASC, étoit obtus, le point d'intersection de l'arête SC avec la perpendiculaire BAC, tomberoit du côté opposé de A, tandis que le point F resteroit en place. La ligne CF tomberoit avec CS sur le côté opposé de la base AS; et l'angle AFC deviendroit obtus. Ainsi dans le triëdre rectangle chacun des deux angles est de la même espèce que le côté opposé.

423. *Corollaire* III. Quant à l'hypoténuse, exprimée par l'angle ISD, elle sera moindre qu'un angle droit, tant que les deux côtés sont des angles aigus; l'angle ISD appartenant alors au triangle rectangle de ce nom.

424.

424. *Corollaire* IV. Si l'un des deux angles, tel que ASB devenoit obtus, l'autre ASC restant aigu, le point I tomberoit du côté opposé de S; et l'hypotenuse, se trouvant comprise entre SC et le prolongement de IS au-delà de S, seroit l'angle contigu de l'angle actuel CSI, ce qui la rendroit plus grande que l'angle droit.

425. *Corollaire* V. Mais si les deux angles linéaires ASB et ASC devenoient obtus en même tems, l'hypoténuse, comprise entre les prolongemens des deux lignes CS et IS, seroit l'angle vertical de l'angle actuel CSI, et par conséquent aigu comme lui.

426. *Corollaire* VI. Donc enfin, l'hypoténuse sera moindre qu'un angle droit, lorsque les deux côtés, et par conséquent aussi les deux angles du triëdre rectangle, sont de la même espèce. Et elle sera plus grande qu'un angle droit, lorsque les deux côtés, et par conséquent aussi les deux angles, sont de différente espèce.

427. *Corollaire* VII. Les triangles BDS et ADS *(Fig.* 106. 107.*)* sont tous les deux rectangles en D, en vertu de la construction. Le triangle BAD, rectangle en A, sera donc perpendiculaire sur SD (318); et comme le plan du triangle BSD, qui constitue l'hypoténuse du triëdre, est conduit suivant SD, les plans des triangles rectangles BAD et BDS seront perpendiculaires entr'eux (344). Cela étant, abaissons de A sur BD, la perpendiculaire AM.

Cette

Cette ligne, menée dans l'un des deux plans, perpendiculairement à leur intersection commune, sera perpendiculaire à l'autre (346); c'est-à-dire, au plan du triangle BDS; elle exprime donc l'élévation du point A au-dessus du plan BDS, qui est l'hypoténuse du triëdre. Mais le triangle BAD *(Fig.* 107.*)* est absolument identique avec le triangle BAH du développement. *(Fig.* 120.*)* Donc enfin, si dans cette dernière figure, on abaisse du point A, les lignes AM et AN, perpendiculaires sur les lignes BH et CF, chacune de ces lignes AM ou AN exprimera la hauteur du point A au-dessus du plan de l'hypoténuse du triëdre, et elles seront par conséquent *égales entr'elles.*

428. *Corollaire* VIII. Abaissant de C la perpendiculaire CO sur SI, un examen attentif de la construction nous apprendra que les deux points E et O du développement *(Fig.* 120.*)* sont coïncidens dans le triëdre *(Fig* 106. 107.*)* En effet, abaissant de A sur BS la perpendiculaire AE, le plan du triangle AEC, étant conduit selon AC, sera perpendiculaire sur le plan ABS (344); ainsi la ligne CE sera aussi perpendiculaire sur BS, qui doit l'être en effet au plan entier du triangle rectangle CAE (346). Donc, les deux lignes SB et SI du développement, étant entièrement coïncidentes dans le triëdre, les deux points E et O du premier ne feront qu'un seul et même point E. Il faudra en conclure *que les deux lignes SE et SO (Fig.* 120*) sont égales entr'elles;* ce que d'ailleurs on pourroit vérifier, quoique bien

bien plus difficilement, par l'application du calcul.

429. *Corollaire* IX. Cette conséquence en amène une autre. Le quarré de CF est égal à la somme des quarrés de AC et de AF (208) ; ou bien, à la somme des quarrés de AC et de AE, en vertu de la construction. Le quarré de AE est égal à la différence des quarrés de AS et de SE (208), ou bien, à la différence des quarrés de AS et de SO, à cause de SO=SE (428). Le quarré de CF sera donc égal à la somme des quarrés de AC et de AS, *moins* le quarré de SO; ce qui fait la différence des quarrés de CS et de SO, ou bien, le quarré de CO. Ainsi donc, *les deux lignes CO et CF seront égales entr'elles.*

430. *Corollaire* X. Une démonstration semblable fera connoitre l'égalité des lignes DI et BH. Le quarré de DI est égal à la différence des quarrés de SI ou SB, et de DS. Donc, le premier des deux étant égal à la somme des quarrés de AS et de AB, celui de DI sera donc égal à la somme de ces deux quarrés, moins celui de DS; c'est-à-dire, à la somme des deux quarrés de AB, et de AD ou AH. Cette somme étant le quarré même de BH, il en résultera naturellement, *que les deux lignes DI et BH sont égales entr'elles.*

431. *Corollaire* XI. La ressemblance des triangles rectangles SDI et SOC, ayant l'angle ICS commun entr'eux (163), donne la proportion (163): ID:IS=CO:CS. Et comme on vient de

de prouver ID=BH (430), CO=CF (429), et que d'ailleurs SI=BS par la construction, on en tire la proportion qui suit : BH:BS=CF:CS, ou bien BH : CF = BS : CS. Il existe donc le même rapport entre les hypoténuses des triangles BAH et CAF qui expriment les angles du triëdre, qu'entre les hypoténuses des triangles BAS et CAS, qui en représentent les côtés.

432. *Corollaire* XII. Multipliant la proportion qu'on vient de trouver, savoir BH:CF= BS:CS, avec AC:AD=CS:AS, fournie par les triangles semblables ADC et SAC, et supprimant le terme CS qui est antécédent et conséquent à-la-fois, on aura, en mettant à la place de AD son égale AH, la proportion suivante : AS:BS=AH×CF:AC×BH. Le rapport AS:BS est donc composé des deux rapports AH:BH, et CF:AC.

433. *Corollaire* XIII. Multipliant cette même proportion BH:CF=BS:CS, avec AE:AB =AS:BS, fournie par les triangles semblables SAB et SEA, et supprimant le terme BS, qui est antécédent et conséquent à-la-fois, on aura, en mettant à la place de AE son égale AF, la proportion qui suit : AS:CS=AF×BH:AB×CF. Le rapport AS:CS sera donc pareillement composé des deux rapports AF:CF et BH:AB.

434. *Corollaire* XIV. Donc enfin (*Fig.* 121.), si l'on mène par S les lignes SP et SQ, parallèles HB et FC, la ressemblance des triangles permettra de substituer aux rapports AH : BH, CF

CF:AC, AF:CF, BH:AB, les rapports suivans qui leur sont respectivement égaux, savoir : AS:PS, SQ:AQ, AS:SQ, et SP:AP. Le rapport AS:BS sera donc composé des deux rapports AS:SP et SQ:AQ. Pareillement le rapport AS:SC sera composé des deux rapports AS:SQ et SP:AP. Ces proportions nous mettront en état de déterminer les côtés d'un triëdre rectangle, dont les angles sont donnés.

Les corollaires que nous venons de démontrer, renferment la construction graphique de tous les cas qui peuvent avoir lieu dans le triëdre rectangle.

PROBLÊME.

435. *Connoissant l'hypoténuse d'un triëdre rectangle, avec un de ses côtés, construire graphiquement l'autre côté, et ses deux angles.* (*Fig.* 120.)

Soit ASC le côté donné; ISC l'hypoténuse. Ayant joint ces deux angles de manière que le côté CS soit commun à tous les deux, dans un point A, pris à volonté sur la ligne SA, élevez AC, perpendiculaire à AS; et abaissez la ligne AD, perpendiculaire sur CS, que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne SI en I. Du centre S, avec le rayon SI décrivez l'arc de cercle IB, qui rencontre la droite AC prolongée en B. Tirez BS; abaissez du point A sur BS, la perpendiculaire AE; ensuite, du point A comme centre, avec les rayons AE et AD, décrivez les arcs de cercle EF et DH; et ayant déterminé par ce mo-

moyen les points F et H, situés sur la ligne AS, tirez CF et BS. L'angle BSA sera l'autre côté du triangle: les angles BHA et CFA seront les angles plans du triëdre, respectivement opposés aux angles linéaires BSA et CSA.

PROBLÊME.

436. *Connoissant un des côtés du triëdre avec l'angle opposé, construire graphiquement l'autre côté, l'autre angle, et l'hypoténuse. (Fig. 120.)*

Soit ASC le côté donné; AFC l'angle opposé. Il en résultera le triangle SFC, ayant ASC pour angle interne, et AFC, nécessairement plus grand que ASC, pour angle externe. Du sommet C de ce triangle, abaissez sur la base SF prolongée la perpendiculaire CA; et du point A abaissez sur SC la perpendiculaire AD. Du centre A, avec les rayons AD et AF décrivez deux arcs de cercle, l'un DH, rencontrant AS en H; l'autre indefini FE, auquel vous menerez du point S la tangente SE, qui rencontrera la ligne CA prolongée, en B. Enfin du centre S, avec le rayon SB, décrivez l'arc BI, qui rencontrera DA prolongée en I, et menez les droites SI et BH.

L'angle BHA sera l'angle plan, l'angle BSA sera l'angle linéaire cherché: et DSI sera l'hypoténuse.

437. *Corollaire.* Comme d'un point quelconque on peut mener à un cercle donné deux tangentes, situées de part et d'autre de son centre,

centre, le problême admet nécessairement deux solutions différentes. Dans la solution qui est enseignée dans la figure ci-jointe, l'hypoténuse du triëdre, de même que le côté et l'angle qu'on demande, sont supposés aigus. Mais prolongeant l'arc EF au-delà de F, on pourra lui mener de S une seconde tangente, du côté opposé de la base AS; ce qui donneroit une direction analogue aux lignes BH et BS. Il faudroit prendre alors les angles que font les prolongemens de ces lignes, tant avec la base AS, qu'avec l'arête SC; et ces angles alors deviendroient obtus, quoiqu'aussi bien compris que les premiers, dans le sens du problême.

PROBLÊME.

438 *Connoissant l'un des deux côtés d'un triëdre rectangle, avec l'angle adjacent, construire graphiquement, l'autre côté, l'autre angle et l'hypothénuse.*

Soit ASC le côté donné. Dans un point A, pris à volonté sur la ligne AS qui représente la base, élevez la perpendiculaire indéfinie CAB sur la base AS; de ce même point abaissez sur CS la perpendiculaire AD; du point A avec le rayon AD décrivez l'arc de cercle DH, qui rencontre la base AS en H. Faites l'angle AHB égal à l'angle donné; et ayant ainsi déterminé sur AC prolongée le point B, menez BS; abaissez sur cette ligne de A la perpendiculaire AE, ensuite, des centres S et A, avec les rayons SB et AE, menez les arcs de cercle

BI et EF. Joignez les points S et I, de même que F et C, par les lignes SI et FC; et vous aurez l'hypoténuse, dans l'angle CSI; l'angle linéaire demandé dans BSA, et l'angle plan demandé dans AFC.

PROBLÊME.

439. *Connoissant l'hypoténuse d'un triëdre rectangle, et l'un des deux angles; construire graphiquement l'autre angle et les deux côtés.*

Ayant pris AS pour base du triëdre, faites l'angle AFC égal à l'angle donné. Menez CN faisant avec CF un angle égal *au complément* de l'hypoténuse; c'est-à-dire, à ce qu'il faut lui ajouter pour la rendre égale à un angle droit; et élevez en F sur CF la perpendiculaire FN. Du centre C, avec le rayon CN décrivez l'arc NS, qui rencontre la base en S, et menez la droite CS. Décrivez de même du centre A, avec le rayon AD, que vous aurez abaissé perpendiculairement sur CS, l'arc DH, rencontrant la base en H; et du centre A avec le rayon AF, l'arc indéfini FE, auquel vous menerez de S la tangente SEB, qui rencontre AE prolongée en B. Alors, ayant décrit du centre S, avec le rayon SB, l'arc BI rencontrant DA prolongée en I, menez les lignes droites IS et BH.

Si l'on n'avoit demandé que le seul côté du triëdre, qui est opposé à l'angle donné AFC, alors, après avoir construit le triangle rectangle CFN, décrit l'arc de cercle NS, et déterminé par son moyen le point S, il suffisoit, de mener la ligne CS; pour résoudre le

le-problème. Car tirant ensuite ensuite la ligne SOI, qui fasse avec CS un angle à CSO, égal à CNO, qui représente lui-même l'hypoténuse donnée, et abaissant sur elle la perpendiculaire IO, on auroit les deux triangles parfaitement égaux CFN et COS; dont les côtés CF et CO seroient égales entr'elles. Ayant de plus l'angle CSO égal à l'hypoténuse donnée, la ligne CS sera identiquement la même avec celle qui est l'hypoténuse du triangle CAS; ainsi l'angle CSA seroit le côté démandé.

PROBLÈME.

440. *Connoissant les deux angles d'un triëdre rectangle, construire graphiquement les deux côtés et l'hypoténuse.*

Ayant pris SA (*Fig.* 121) pour base du triëdre, faites de part et d'autre les angles ASP et ASQ égaux aux deux angles donnés du triëdre. D'un point quelconque A, pris à volonté sur la base, abaissez sur SP et SQ les deux perpendiculaires AI et AK; et du centre S, avec les rayons SI et SK décrivez les arcs IL et KM. Dans les points L et M élevez sur la base AS deux perpendiculaires indéfinies, sur lesquelles vous porterez de S les deux perpendiculaires AK et AI; de manière que SR=AK, et ST=AI. Les angles ASR et AST seront les côtés du triëdre, respectivement opposés aux angles ASP et ASQ.

Démonstration. Les triangles semblables SIA et SAP fournissent la proportion SI ou SL: AS=AS: SP. On tire des triangles semblables

SKA

SKA et SAQ la proportion suivante; AS:AK=SQ:AQ; et comme AK=SR, en vertu de la construction, cette proportion devient AS:SR=SQ:AQ. Multipliant par ordre, et supprimant le terme commun AS, on aura SL:SR=AS×SQ:SP×AQ. Le rapport SL:SR ou SA:SB sera donc composé des deux rapports AS:SP et SQ:AQ. Or, ces deux rapports sont précisément ceux, que nous avons trouvé équivalens au rapport SA:SB (432. *Fig.* 120); comme devant déterminer la quantité du côté, opposé à l'angle ASP: ainsi l'angle ASB sera le même dans les deux figures, et exprimera le côté qu'on cherchoit.

De l'autre côté de la figure, les triangles semblables SKA et SAQ donnent la proportion SK:AS=SA:SQ, ou SM:AS=SA:SQ. Une autre proportion est fournie par les triangles semblables SIA et SAP; savoir: AS:AI=PS:AP, ou bien, à cause de AI=ST, AS:ST=PS:AP. Multipliant par ordre, et supprimant encore le terme commun AS, il en résulte SM:ST, c'est-à-dire, SA:SC=SA×PS:SQ×AP. Ainsi le rapport SA:SC, composé des deux rapports SA:SQ, et PS:AP, et se trouvant parfaitement identique avec celui de (432) qui détermina la grandeur du côté opposé à l'angle, il faut en conclure que l'angle ASC exprime en effet le côté opposé à l'angle ASQ, qu'on avoit demandé.

CHA-

CHAPITRE QUATORZIEME.

LES PROJECTIONS.

DÉFINITIONS.

441. On appelle *projection d'un point sur un plan*, le pied de la perpendiculaire, abaissée du point sur le plan.

Prenons pour exemple le plan désigné par les lettres WYZ. (*Fig.* 122.) Abaissant d'un point A qui est hors de ce plan, la perpendiculaire AL sur lui, le point L où elle le traverse, sera la projection du point A, ainsi que de tous les autres points de la perpendiculaire AL sur le plan WYZ.

442. Donc, connoissant d'ailleurs la position du plan dans l'espace, et la projection du point A sur lui, il ne reste plus qu'à connoître son élevation au-dessus du plan, c'est-à-dire, la ligne AL; et alors la position du point dans l'espace sera parfaitement déterminée.

443. Elle sera également déterminée par les projections du point A, faites sur deux plans différens, perpendiculaires entr'eux; tels que sont les plans WYZ et XYZ. Dans ce dernier cas, abaissant du point A les lignes AL et AP perpendiculaires sur les deux plans, et menant par les projections L et P les lignes LT et PT, qui leur sont parallèles, ou aura le rectangle APTL, perpendiculaire à-la-fois aux deux plans WYZ et XYZ, de même qu'à leur intersection commune YZ. (*Fig.* 122.)

444. Abaissant de même de tous les autres points des deux lignes AP et AL, des lignes respectivement perpendiculaires aux deux plans WYZ et XYZ, les premières auront leurs points d'intersection avec le premier des deux dans la ligne LT parallèle à AP ; tandis que les points d'intersection que font les autres avec le second des deux plans, se trouveront dans la ligne PT, parallèle à AL. La projection de la ligne entière AP sur le plan WYZ sera donc LT; et la projection de la ligne AL sur le plan XYZ sera PT.

445. Pour fixer les idées, et pour se conformer d'ailleurs aux usages habituels de la ligne de niveau et du fil à plomb, on est convenu de supposer l'un des deux plans *horizontal*, et l'autre *vertical*. Nous donnerons le nom de *base* à la ligne YZ, intersection commune des deux plans.

446. Ces principes étant posés, menons d'un point quelconque B du plan vertical, à un autre point D du plan horizontal, la ligne droite BD (*fig.* 123). De ces deux points B et D abaissons sur la base YZ les deux lignes perpendiculaires BC et DE, dont la première sera nécessairement située dans le plan vertical, et l'autre dans le plan horizontal ; et menons les deux lignes CD et BE, la première, située dans le plan horizontal, et l'autre dans le vertical.

447. Les deux lignes BC et DE seront respectivement perpendiculaires, la première au plan horizontal, l'autre au plan vertical.

448.

448. Le plan du triangle BCD, conduit selon BC, et rectangle en C, sera perpendiculaire au plan horizontal; les points Q, Q', déterminés par les lignes AQ, A'Q', perpendiculaires au même plan, seront les projections horizontales des points A, A'; et la ligne CD sera la projection horizontale de BD.

449. Le plan du triangle DEB, rectangle en E, et conduit selon DE, sera perpendiculaire au plan vertical; les points P, P', déterminés par les lignes AP, A'P', perpendiculaires au même plan, seront les projections verticales des points A, A', et la ligne BE sera elle-même la projection verticale de la ligne BD.

450. Le point C sera donc le sommet d'un triëdre bi-rectangle, compris entre les trois plans BCD, BCE, DCE, dont les deux premiers sont perpendiculaires au troisième, et font entr'eux un angle plan, égal à l'angle linéaire DCE.

451. Le point E sera aussi le sommet d'un triëdre bi-rectangle, compris entre les trois plans DEB, DEC, BEC, dont les deux premiers sont perpendiculaires au troisième, et comprennent entr'eux, un angle plan, égal à l'angle linéaire BEC.

452. Le point B sera le sommet d'un triëdre rectangle, compris entre les plans CBD, CBE et EBD, dont les deux derniers font un angle droit entr'eux. Des deux autres angles

plans, l'un DBCE est égal à l'angle linéaire DCE ; l'autre CBDE exprime l'inclinaison mutuelle des deux plans CBD, EBD, ayant la ligne même BD pour sommet commun.

453. Pareillement le point D sera le sommet d'un triëdre rectangle, compris entre les plans EBD, ECD et BCD, dont les deux derniers font un angle droit entr'eux. Des deux autres angles plans, l'un BDEC est égal à l'angle linéaire BEC ; et l'autre CBDE exprime cette même inclinaison mutuelle des deux plans CBD et EBD, dont le sommet linéaire commun est encore la ligne même BD.

454. Pour construire cet angle, que comprennent entr'eux les deux plans, menés selon la ligne BD, et dont l'un est perpendiculaire au plan horizontal, l'autre au vertical, il faut recourir aux constructions graphiques du triëdre rectangle, dont la connoissance en général est inséparable de celle des projections.

455. Le grand objet des projections est de représenter par des figures faites sur un seul plan, et n'ayant par conséquent que deux dimensions, tout ce qui concerne le corps mathématique, dans lequel la position respective des parties suppose l'usage des trois dimensions, et de réduire ainsi la connoissance entière du corps mathématique et celle des différentes surfaces, tant planes, que convexes ou concaves, à celle de deux seules figures planes, dont l'une est supposée décrite dans le plan horizontal, et l'autre dans le vertical.

456.

456. Il dépend encore du Géomètre, de faire de ces deux plans un seul plan horizontal, en supposant que le vertical, tournant autour de la base comme charnière, ait fait un quart de conversion, pour s'abattre sur le plan horizontal, et ne faire plus qu'un seul et même plan avec lui. En vertu de ce mouvement, toute ligne située dans le plan vertical, et perpendiculaire à la base, restera perpendiculaire à cette même base, après que la conversion aura été opérée ; et la projection verticale d'un point quelconque se trouvera sur le prolongement de la perpendiculaire, que de sa projection horizontale on aura abaissé sur la base.

456. De plus nous appellerons *les traces d'un plan* quelconque, les deux intersections linéaires qu'il fait avec les deux plans déterminateurs : et de même *les traces d'une ligne* seront les points où elle traverse ces mêmes plans.

La base sera toujours distinguée des autres lignes de la figure, par un trait plus grossier, et par conséquent plus visible.

Le plan vertical venant à tourner autour de la base, toute ligne, telle que PT, perpendiculaire à la base, continuera de faire un angle droit avec elle, et se trouvera enfin en ligne droite avec BT, qui marquera la projection horizontale de ce même point A, dont la verticale avoit été sur PT.

Les points B et D seront les deux traces de la ligne BD. Les lignes BE et DE seront de même les deux traces du plan BDE.

Ces principes étant posés, nous enseignerons la solution d'une suite de problèmes, qu'on peut regarder

garder comme fondamentaux de la science des projections, et comme devant conduire à la solution de questions plus compliquées.

PROBLÈME I.

458. *Connoissant les deux projections d'une ligne quelconque, déterminer ses traces sur les deux plans déterminateurs, c'est-à-dire, les points où elle traverse le plan vertical et le plan horizontal.* (*Fig.* 124.)

Soit BE la projection verticale, CD la projection horizontale de la ligne en question. Au point E où la première traverse la base, élevez la perpendiculaire ED, qui rencontre la seconde en D. Au point C où la seconde traverse la base, élevez la perpendiculaire CB, qui rencontre la première en B. Les points B et D seront les deux traces demandées.

Car la ligne BD, dont les deux projections sont CD et BE, devant être l'intersection commune de deux plans différens, l'un BCD, perpendiculaire à l'horizontal, et dirigé selon BC et CD, faisant un angle droit entr'elles; l'autre DBE, perpendiculaire au vertical, et mené selon DE et EB, qui comprennent aussi un angle droit; elle doit donc passer d'un côté par l'intersection commune des deux lignes DE et DC, et de l'autre par l'intersection commune des lignes DE et DC. Ces deux points seront donc les traces demandées.

459. *Corollaire* I. Si la ligne BD étoit parallèle au plan horizontal, sa projection horizontale CD pourroit faire avec la base YZ un angle quelconque, mais sa projection verticale

BE

BE seroit alors parallèle à la base YZ; et on trouveroit comme auparavant sa trace B, en élevant en C la perpendieulaire CB, jusqu'à la rencontre de cette parallèle.

460. *Corollaire* II. Réciproquement si la ligne BD étoit parallèle au plan vertical, sa projection verticale BE pourroit faire avec la base YZ un angle quelconque; mais sa projection horizontale CD seroit parallèle à la base YZ, et on trouveroit encore la trace D, en élevant en E la perpendiculaire ED, jusqu'à la rencontre de cette parallèle.

461. *Corollaire* III. Si par un autre point quelconque, dont les deux projections seroient K et I (*Fig.* 124), il falloit mener une ligne parallèle à BD, on tireroit d'abord par les points K et I les lignes B'E', C'D', respectivement parallèles aux deux projections BE et CD. Ces lignes seroient les projections de la droite demandée, parceque généralement les projections de deux lignes parallèles, sur un plan quelconque, doivent être parallèles entr'elles, étant les intersections de deux plans parallèles entr'eux, avec un troisième. Après quoi, élevant aux points C', E', les lignes C'B' et E'D' perpendiculaires à la base commune, les points B' et D' seront les traces de la ligne demandée.

PROBLÈME II.

462. *Les mêmes choses étant supposées, déterminer les angles que fait la ligne BD avec chacun des deux plans déterminateurs.* (*Fig.* 123. 124.)

Les

Les deux projections de la ligne BD étant données, ce qui en fera trouver facilement les traces par le problème précédent, il faut donc regarder comme connues, les lignes BC et DE, projections de la ligne entière BD, de même que la partie CE de la base, qui les sépare.

L'angle que fait la ligne BD avec le plan horizontal, sera l'angle même BDC, parceque BC est perpendiculaire à ce plan. Cet angle appartient au triangle rectangle BCD, qu'il faut supposer entièrement connu, parcequ'il a pour hauteur BC, et pour base CD, dont le quarré est égal à la somme des quarrés de CE et de DE.

L'angle que fait cette même ligne avec le plan vertical, sera l'angle DBE, par la même raison. Cet angle appartient au triangle rectangle DEB, qu'il faut encore supposer connu, parcequ'il a pour hauteur DE, et pour base BE, dont le quarré est la somme des quarrés de BC et de CE.

Quant à la ligne même BD, son quarré est visiblement égal à la somme des trois quarrés de BC, CE, et DE.

PROBLÈME III.

463. *Les mêmes choses étant supposées, on demande la construction de l'angle, que fait la ligne BD avec la base CE.* (*Fig.* 123.)

Comme

Comme ces deux lignes ne se coupent pas réciproquement, menons dans le plan horizontal, et par le point D, la ligne DF, parallèle à CE; de même que CF parallèle à DE: et tirons la ligne BF. La ligne CE, perpendiculaire sur BC et sur CF, le sera sur tout le plan BCF; ainsi DF, parallèle à CE, sera perpendiculaire sur le même plan BCF. L'angle BFD sera donc un angle droit; et le triangle BFD sera rectangle; ayant DF=CE pour base, et pour hypoténuse la ligne BD, dont le quarré est la somme des quarrés des trois lignes BC, CE et ED. L'angle demandé sera celui que comprennent entr'elles la base et l'hypoténuse de ce triangle.

PROBLÈME IV.

464. *Connoissant les projections de trois points quelconques, trouver les traces du plan qui passe par ces points.*

Soient les trois points A, A′, A″. Si on mène les trois lignes AA′, AA″, A′A″, et qu'on les prolonge indéfiniment de part et d'autre, ces lignes, comme situées dans le plan dont on demande les traces, doivent traverser celles-ci dans les points qui seront les traces mêmes des lignes AA′, AA″, A′A″. Il n'y aura qu'à appliquer à chacune de ces lignes la solution du premier problème; et on aura pour chacune des deux traces, trois points par lesquels elle doit nécessairement passer, au lieu de deux, qui suffiroient déjà pour en déterminer la position.

Donc,

Donc *(Fig.* 125*)*, désignant par Q, Q′, Q″ les projections horizontales des points donnés; par P, P′, P″ leurs projections verticales, situées sur le prolongement des perpendiculaires, qu'on aura respectivement abaissé des premières sur la base commune; on commencera par mener les lignes PP′, P′P″, QQ′, Q′Q″, qu'on prolongera jusqu'à leurs points de rencontre respectifs G, F, H, I avec la base. Dans les points H et I élevez des perpendiculaires à la base, jusqu'aux points B et B′, où elles rencontrent les lignes PP′ et P′P″. Elevez de même des perpendiculaires dans les points G et F, jusqu'aux points D et D′, où elles rencontrent les lignes QQ′ et Q′Q″. Les lignes BB′ et DD′, prolongées jusqu'au point commun d'intersection où elles coupent la base, seront les traces demandées.

PROBLÊME V.

465. *Connoissant les traces OB et OD d'un plan, trouver les traces d'un second plan, parallèle à celui-ci, et qui passe par un point, dont la position est donnée par ses deux projections P et Q. (Fig.* 126.*)*

Les deux plans étant supposés parallèles entr'eux, les intersections linéaires qu'ils forment avec chacun des deux plans déterminateurs, c'est-à-dire, leurs traces, tant horizontales que verticales, seront parallèles de même.

Menant par le point donné une ligne parallèle à la trace horizontale du plan donnée, cette

cette ligne qui sera entièrement située dans le plan demandé, traversera le plan vertical dans un point qui appartiendra à la trace verticale de ce dernier.

Menant par le même point donné une ligne parallèle à la trace verticale, cette ligne, qui sera aussi située dans le plan qu'on demande, traversera le plan horizontal dans un point qui sera un de ceux de sa trace horizontale.

Reste donc à déterminer les points où les deux parallèles en question traversent les deux plans déterminateurs. Ce problême est entièrement compris dans le premier; et voici ce que devient dans le cas présent la solution générale que nous y avons enseignée.

Par le point P menez la ligne PH, parallèle à la base, de même que PI, parallèle à la projection verticale, et rencontrant la base en I.

Par le point Q, menez la ligne QK parallèle à la base, et la ligne QG, parallèle à la projection horizontale, et rencontrant la base en G.

Dans les deux points G et I élevez les deux lignes GH et IK, perpendiculaires à la base, jusqu'à la rencontre des deux parallèles PH et QK; et par les points H et K menez les lignes HL et KL, respectivement parallèles aux deux traces BO et DO du plan donné. Ces deux lignes, qui par la nature du problême doivent nécessairement se rencontrer dans quelque point

point de la base même, seront les traces qu'on demandoit.

PROBLÈME VI.

466. *Connoissant les deux traces BO et DO d'un plan, et les projections VEF et WGH d'une ligne qui le traverse, déterminer les deux projections du point de leur intersection mutuelle.* (*Fig.* 127.)

Du point de rencontre E de la trace verticale avec la projection verticale abaissez sur la base la perpendiculaire EK. Dans le point d'intersection F de cette même trace verticale avec la base, élevez sur elle la perpendiculaire FD, qui rencontre la trace horizontale en D, et tirez DK, qui rencontrera la projection horizontale de la ligne donnée dans un point M. Ce point sera la projection horizontale de son point d'intersection avec le plan donné.

Pareillement, du point de rencontre G de la trace horizontale avec la projection horizontale abaissez sur la base la perpendiculaire GI. Et dans le point de rencontre H de cette même trace avec la base élevez sur celle-ci la perpendiculaire HB. Tirez BI. Le point L ou cette ligne rencontre la projection verticale de la ligne donnée, sera la projection verticale de son point d'intersection avec le plan donné.

La ligne LM qui réunit les deux projections de ce point, sera perpendiculaire à la base.

Pour

Pour prouver cette solution, imaginons un plan, perpendiculaire au plan horizontal, et conduit suivant la ligne donnée, et considérons l'intersection de ce plan avec le plan donné. Sa projection horizontale sera la même que celle de la ligne suivant laquelle ce plan a été conduit; savoir GH. La ligne elle-même commencera en I, et elle se terminera à quelque point de la trace verticale : ainsi, en vertu de la construction du premier problême, elle ne pourra avoir pour projection verticale que la ligne IB. Ainsi la projection verticale du point qu'on cherche, devant se trouver à-la-fois sur les deux lignes IB et DF, se trouvera naturellement dans le point L de leur intersection mutuelle.

Imaginons de même un plan, perpendiculaire au plan vertical, et conduit suivant la ligne donnée; et considérons l'intersection de ce plan avec le plan donné. Sa projection verticale sera la même que celle de la ligne suivant laquelle le plan a été conduit; savoir EF. La ligne elle-même commencera en K; et devant se terminer à quelque point de la trace horizontale, elle ne pourra avoir pour projection horizontale que la ligne KD. Ainsi la projection horizontale du point qu'on cherche, devant se trouver à-la-fois sur les deux lignes GH et KD, sera dans le point M de leur intersection mutuelle.

Il suit enfin de la nature du problême, que la ligne LM, qui joint les deux projections, est perpendiculaire à la base.

PRO-

PROBLÈME VII.

467. *Connoissant les deux traces d'un plan, abaisser d'un point dont les projections sont données, une perpendiculaire sur le plan.*

Des projections du point donné abaissez sur les deux traces du plan, des lignes qui leur sont respectivement perpendiculaires; elles seront les projections indéfinies de la perpendiculaire qu'on cherche.

Car menant selon la perpendiculaire deux plans, dont l'un soit perpendiculaire au plan horizontal, l'autre au vertical, les projections indéfinies qu'on demande, seront situées dans ces deux plans; et comme les deux plans sont respectivement perpendiculaires aux deux traces, les intersections qu'ils forment avec les deux plans déterminateurs, le seront de même.

Les deux projections de la perpendiculaire étant trouvées, le problème actuel ne sera plus qu'un cas très-particulier du précédent.

PROBLÈME VIII.

468. *Les deux projections d'une ligne, de même que celle d'un point étant données, trouver les traces d'un plan, mené par le point perpendiculairement à la ligne. (Fig. 128.)*

Soient VE et WH les deux projections de la ligne donnée; soient aussi P et Q celles du point donné. D'un point quelconque O de la base abaissez sur VF et WH les perpendiculaires OE et OD; elles seront les traces d'un plan,

plan, perpendiculaire à la ligne donnée, en vertu du problême précédent. Restera donc à mener par le point donné un plan parallèle à celui-ci; problême entièrement identique avec le problême VII, auquel par conséquent celui-ci est réductible.

PROBLÊME IX.

469. *Abaisser d'un point donné une perpendiculaire sur une ligne donnée, les projections de l'un et de l'autre étant supposées connues.* (*Fig.* 129.)

Soient P et Q les projections du point: FV et HW celles de la ligne. Des points P et Q menez les lignes indéfinies PR et QT, parallèles à la base. De ces mêmes points menez les lignes PU et QS, respectivement perpendiculaires aux deux projections FV et HW; et dans leurs points d'intersection U et S avec la base, élevez les perpendiculaires UT et SR, qui rencontreront les deux parallèles aux points T et R. Menant par ces points les lignes TG et RB respectivement perpendiculaires aux deux projections FV et HW, ces lignes seront en vertu du problême précédent, les traces du plan mené par le point donné, et perpendiculaire à la ligne donnée. Reste donc à déterminer le point d'intersection de ce plan et de la ligne donnée.

Cette seconde partie de la solution est comprise dans celle du problême VI. Par les points G et H menez les lignes GI et HB, perpendiculaires à la base: et ayant déterminé par

par cette dernière le point B, tirez IB. Le point L, où elle rencontre la projection VF, sera la projection verticale de celui où la perpendiculaire abaissée du point donné, rencontre la ligne donnée.

Une construction semblable en déterminera la projection horizontale M, laquelle au reste doit être au point où la perpendiculaire, abaissée du point L, rencontre la projection horizontale de la ligne donnée.

PROBLÈME X.

470. *Connoissant les projections de deux lignes menées dans l'espace, trouver les traces d'un plan, conduit suivant l'une, et parallèle à l'autre.* (*Fig.* 130.)

Soient IL et KM les projections de la *première* des deux lignes: et soient BC et AD celles de la *seconde*. Elevant aux points I, K, B, A les perpendiculaires IM, KL, BD, AC, jusqu'à la rencontre des projections horizontales et verticales, les points M et D seront ceux où les deux lignes données rencontrent le plan horizontal; et les deux autres points L et C seront les points d'intersection de ces mêmes lignes avec le plan vertical.

La première des deux lignes devant être entièrement située dans le plan demandé, dont elle doit rencontrer quelque part les traces, ses points d'intersection avec ces mêmes traces doivent nécessairement être en L et en M. Ainsi, menant d'un point quelconque O

de

de la base, aux points L et M les droites OL et OM, tout plan conduit suivant OL et OM, contiendra aussi la première des deux lignes données, et remplira l'une des deux conditions du problème. Reste donc à déterminer parmi tous ces plans, celui qui satisfait en même tems à l'autre.

Des points I et L menez les lignes IE et LF, parallèles à la projection verticale BC. Des points K et M menez aussi les lignes KH et MG, parallèles à la projection horizontale AD. Aux points G et F élevez les lignes GE et FH, perpendiculaires à la base; et ayant déterminé par leur moyen les points E et H, menez les lignes droites EL et MH. Elles doivent se rencontrer dans quelque point O de la base; et seront les traces du plan demandé.

Pour le prouver, considérons la ligne qui joint entr'eux les points E et M des deux traces, de même que celle qui en joint les points L et H. Ces deux lignes seront donc entièrement situées dans le plan de ces traces. Et comme leurs projections verticales EI et LF sont parallèles à CB; et que leurs projections horizontales GM et KH sont pareillement parallèles à AD, la ligne donnée CD, dont CB et AD sont les deux projections, sera donc parallèle aux lignes EM et LH, et par conséquent aussi au plan des deux traces EO et MO, lequel, étant conduit suivant LM, et parallèle à CD, remplira les deux conditions du problème.

471. *Corollaire* I. Si par les points C et D on mène les lignes CO′ et DO′, parallèles aux traces EO et MO qu'on vient de trouver, ces deux lignes seront les traces d'un nouveau plan, conduit suivant CD, et parallèle à LM.

472. *Corollaire* II. La ligne que d'un point quelconque de l'un des deux plans on aura abaissé perpendiculairement sur l'autre, sera en même tems la plus courte qu'il soit possible de mener entre les deux lignes données.

473. *Corollaire* III. Et comme les deux plans déterminateurs font avec chacun des deux plans EOM et CO′D un triëdre rectangle sur la base AOO′, la dite ligne n'est autre chose que l'élevation du point O au-dessus de l'hypoténuse du second de ces triëdres. Ainsi, pour la construire, élevez en O sur la base la perpendiculaire QOR; abaissez de ce même point sur O′Q la perpendiculaire OS; et ayant décrit l'arc de cercle SU, et mené la ligne RU, abaissez de O sur cette dernière ligne la perpendiculaire OW; elle exprimera la plus courte distance entre les deux lignes proposées. La démonstration de cette solution est renfermée dans le *Corollaire* VII, *prop.* 420.

Obligés de nous resserrer entre les bornes d'un ouvrage élémentaire, nous supprimons ici, avec quelque regret pourtant, ce que nous avions à dire encore sur cette partie intéressante de la Géométrie, à qui son illustre inventeur a donné le nom de *Géométrie déscriptive.*

Toutes les questions qui appartiennent à la Géométrie déscriptive, sont également accessibles aux

ux méthodes générales auxquelles conduit la marche oujours uniforme du calcul littéral ; et si pour ré-oudre un problème quelconque, il suffisoit d'avoir rouvé les équations desquelles dépend cette solution, 'analyse mériteroit la préférence sur la construction raphique, par la facilité avec laquelle elle fournit es équations. Mais ces équations sont presque tou-ours, même dans les cas les plus faciles, au nombre le trois au moins, à trois inconnues chacune, d'où l résulte pour la valeur de chaque inconnue des ormules tellement compliquées, qu'elles en de-iennent presqu'inutiles pour la pratique de l'art. De plus il faudroit toujours, pour résoudre le pro-blème, exprimer par des nombres toutes les incon-nues qu'une analyse infiniment compliquée auroit fait découvrir; il faudroit construire les lignes représen-ées par ces nombres, et les joindre entr'elles sous les angles qu'il faudroit encore déterminer séparé-ment. Or, c'est ce que la Géométrie apprend à aire immédiatement, sans aucune analyse préliminaire, par des constructions infiniment simples, qui eviennent à l'intersection de quelques lignes, et ui sont à la portée du dernier des artistes.

CHAPITRE QUINZIEME.

LES POLYÈDRES.

DÉFINITIONS.

474. Tout corps terminé de toutes parts par des surfaces planes, qui doivent être *au moins* au nombre de *quatre*, reçoit le nom de *corps polyëdre*, ou simplement de *polyëdre*.

475. L'intersection commune de deux faces adjacentes est nommée *arête* du polyëdre. Le nombre des arêtes est donc la moitié de celui

des côtés de toutes les faces polygones qui composent la surface du polyëdre.

476. Trois ou plusieurs faces qui concourent dans un point, font de ce point un des sommets du polyëdre. Chaque sommet est en même tems celui d'un des angles solides, que présente la surface.

THÉORÈME.

477. *Le nombre des angles solides d'un polyëdre quelconque est égal à celui de ses arêtes, moins celui de ses faces, plus deux.*

Ayant prouvé que la capacité d'un *triëdre* quelconque est égale à la somme de ses angles plans, moins celle de *deux* droits; on en tirera la conséquence naturelle que la capacité d'un angle solide *tetraëdre* est égale à la somme de ses angles plans, moins *quatre* angles droits; que la capacité d'un angle solide *pentaëdre* est égale à la somme de ses angles plans, moins *six* angles droits; et qu'en général, désignant par s la somme des angles plans d'un angle polyëdre, et par n le nombre de ses faces, la capacité de l'angle sera égale à $s-2n+4$; l'angle droit étant l'unité des angles linéaires, et l'orthoëdre celle des angles solides.

Cela étant, d'un point quelconque pris à volonté au dedans du solide, menez des lignes droites à tous ses sommets. L'espace entier indéfini dont ce point peut être supposé le centre, et qui équivaut à *huit* orthoëdres, sera donc partagé en autant d'angles solides que la surface du polyëdre aura de faces. Le nombre de ces lignes elles-mêmes, qui seront les arêtes de ces angles polyëdres concourant au centre, sera égal à celui des sommets du solide. Le nombre des faces enfin entre lesquelles ces angles seront compris, sera le double de celui des arêtes qui se trouvent sur la surface du solide, la même

arête

arête étant toujours commune à deux angles polyëdres contigus.

Or, la capacité de chacun de ses angles polyëdres étant égale à $s-2n+4$, la somme de tous ces angles, que nous savons être celle de huit orthoëdres, sera donc égale à celle de tous les angles plans qui auront pour leurs sommets linéaires les lignes qu'on aura mené du centre à tous les sommets du solide, et qui sera celle de quatre angles droits, prise autant de fois que le solide a de sommets: *moins* deux fois le nombre des faces qui comprennent tous ces angles, et qui est lui-même le double de celui des arêtes, se trouvant sur la surface du solide: *plus* quatre fois le nombre de ses faces.

Donc, désignant par S le nombre de ses angles solides; par F le nombre de ses faces; par A celui de ses arêtes; on aura l'égalité très-naturelle: $8=4S-4A+4F$; et divisant par 4 de part et d'autre, $2=S-A+F$, ou $S=A-F+2$; ce qui est l'énoncé du théorème.

478. Le corps polyëdre reçoit son nom du nombre de ses faces. Quatre faces font le corps *tetraëdre;* cinq faces le corps *pentaëdre;* six faces le corps *hexaëdre* etc.

479. La *pyramide* est un corps, ayant pour base un polygone quelconque, et toutes ses autres arêtes qui ne sont pas côtés de la base, concourant dans un seul point hors de cette base, qui est le sommet de cette pyramide.

Telle est (*Fig.* 131.) la pyramide SABCDE, ayant le pentagone ABCDE pour base, et le point S pour sommet. Si on coupe un angle polyëdre quelconque par un plan, qui en traversant toutes ses arêtes, détermine les sommets de la base, il en résultera une pyramide.

Le

Le nombre des côtés de la base étant désigné par n, celui des sommets, de même que celui de ses faces sera $n+1$; et celui de ses arêtes sera $2n$.

Tous les angles à la base d'une pyramide quelconque, sont *triëdres*. Celui du sommet est polyëdre, d'après le nombre des faces qui concourent au sommet. La totalité de ces dernières faces est ce qu'on nomme surface latérale ou convexe de la pyramide. En y ajoutant la base, on aura sa surface entière.

480. La hauteur d'une pyramide est la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base, prolongée en cas de besoin. La pyramide est nommée *triangulaire*, *quadrangulaire* etc. selon le nombre des côtés de sa base. Elle est régulière, lorsqu'ayant pour base un polygone régulier, la ligne qui joint le centre de cette base au sommet, et qui alors prend le nom d'*axe*, est perpendiculaire sur la base, et exprime par conséquent la hauteur de la pyramide.

481. La pyramide étant coupée par un plan quelconque parallèle à la base, la portion de cette pyramide, qui est comprise entre les deux bases, est nommée *pyramide tronquée*.

Les faces latérales de la pyramide tronquée sont donc des trapèzes, et les deux bases opposées sont des polygones semblables (350).

Les pyramides tronquées à bases non-parallèles, ne sont guères l'objet de la Géométrie élémentaire.

Le corps désigné par les lettres ABCDEFGHIK (*Fig.* 181.) est une pyramide tronquée.

482.

482. Le prisme est un corps, compris ıtre deux plans parallèles, et terminé latéılement par des arêtes parallèles entr'elles. *Fig.* 132. 133. 135.)

Le prisme est donc ce que deviendroit une pymide tronquée, dont les arêtes latérales, au lieu : concourir dans un point, seroient parallèles en'elles.

Les faces latérales de la pyramide tronquée étant :s trapèzes, celles du prisme seront de véritables ırallélogrammes. Et les deux bases de la première ant semblables entr'elles, celles de la seconde seınt égales.

Le nombre des côtés de chaque base étant dégné par n, ce nombre sera aussi celui des parallogrammes qui composent la surface latérale du :isme ; le nombre total de ses faces sera $n+2$; :lui de ses sommets sera $2n$; et celui de ses arêtes :ra $3n$.

483. La *hauteur* d'un prisme est la perendiculaire, abaissée de l'une de ses deux ases sur l'autre. Le prisme est *droit* ou *blique*, d'après que ses arêtes latérales sont erpendiculaires sur les deux bases, ou qu'elles ınt un angle oblique avec elles.

La hauteur du prisme droit est donc égale à hacune des arêtes latérales, ou égale au côté du ırisme. La hauteur du prisme oblique est toujours noindre que son côté.

484. Le prisme est nommé *triangulaire*, *uadrangulaire*, *pentagonal* etc. selon le nombre es côtés de chacune de ses bases. Il a parıut des triëdres pour angles solides, quelque *it* le nombre de ses côtés.

485.

485. Le prisme dont la base est un parallélogramme, et dont par conséquent toutes les faces sont des parallélogrammes, est nommé *parallèlépipède*. Les faces opposées du parallélépipède sont donc égales entr'elles : les arêtes qui joignent deux faces opposées sont égales de même; ses angles opposés sont symmétriquement égaux entr'eux. (*Fig.* 132.)

486. Le parallèlépipède rectangle est celui dont toutes les faces sont des rectangles. C'est donc un prisme droit, ayant un rectangle pour base, et dont tous les angles solides sont des orthoëdres. (*Fig.* 133.)

487. Le cube est un parallèlépipède rectangle dont la base est un quarré, et dont la hauteur est égale au côté de la base.

Ainsi toutes les arêtes du cube, au nombre de *douze*, sont égales entr'elles; et toutes ses faces, au nombre de *six*, sont des quarrés égaux entr'eux.

La pyramide triangulaire est sous plusieurs rapports parmi les polyëdres, ce que le triangle rectiligne est parmi les polygones.

Tout polyëdre peut être partagé en pyramides triangulaires par des plans diagonaux, menés du sommet de chaque angle solide à toutes les arêtes qui ne sont pas situées dans les plans de ses faces. La pyramide triangulaire est donc l'élément du polyëdre, comme le triangle est l'élément du polygone.

Toute pyramide triangulaire peut être inscrite dans une sphère. Si dans les centres des cercles, circonscrits à chacune de ses quatre faces, on élève des perpendiculaires aux plans de ces faces, leur point de rencontre commun sera le centre de la sphère, circonscrite à la pyramide.

Si

Si de chaque sommet de la pyramide on mène une ligne, qui passant entre ses trois arêtes, est à des distances égales de chacune d'elles, les quatre lignes de division se rencontreront dans un seul point, qui sera le centre de la sphère inscrite.

Si on prolonge indéfiniment de part et d'autre, les quatre faces de la pyramide, on aura quatre espaces pyramidaux extérieurs, compris entre chacune des quatre faces et les prolongemens des trois autres: et dans chacun des quatre espaces il sera encore possible d'inscrire une sphère. Les expressions générales qui déterminent la position des centres des cinq sphères, sont parfaitement analogues à celles qui ont été démontrées pour le triangle, et qui ont été l'objet de notre huitième chapitre.

Si de chaque sommet de la pyramide on abaisse une perpendiculaire sur la face opposée, ces perpendiculaires se rencontrent dans un seul point, de même que dans le triangle.

Enfin, de même que le triangle est la moitié du rectangle de même base et de même hauteur, la pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur; ce qui sera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE SEIZIEME.

LA MESURE DES SOLIDES.

DÉFINITIONS.

488. La capacité d'un volume quelconque ne pouvant être déterminée qu'en comparant ce volume à un autre volume qu'on suppose connu, le *cube* est le corps qu'on a préféré aux autres,

autres, pour servir d'unité aux nombres par lesquels on exprime la capacité d'un solide.

THÉORÈME.

489. *La solidité d'un parallèlépipède rectangle est égale au produit de ses trois dimensions, savoir, de sa longueur, de sa largeur et de sa hauteur; ou bien, des trois arêtes qui concourent à former chacun de ses angles solides.* (*Fig.* 133.)

Désignons par A l'unité linéaire qu'on a employé pour exprimer numériquement chacune de ses dimensions : et supposons l'arête BC, longueur de la base, égale à pA; l'arête CD, largeur de la base, égale à qA; l'arête CF, hauteur du parallèlépipède, égale à rA; les lettres p, q, r, exprimant des nombres absolus quelconques. La surface de la base, égale au produit de sa longueur multipliée par sa largeur, sera donc exprimée par pq AA; c'est-à-dire, elle contiendra autant de fois le quarré de A, que le produit pq contient d'unités. Sur chacun de ces quarrés on pourra mettre le cube de A; ainsi le nombre de ces cubes qui occuperont entièrement la base du parallèlépipède, sera égal au produit pq; il en résultera un parallèlépipède, qui aura la même base que le parallèlépipède proposé, mais dont la hauteur ne sera que d'un seul A. Pour l'élever à la hauteur du parallèlépipède proposé, il faudra en prendre un nombre égal à r, et les mettre l'un sur l'autre; il en résultera un parallèlépipède, qui contiendra autant de fois le cube de A, que le pro-

produit *pqr* contient d'unités ; ce qu'on exprime en le supposant égal au produit de ses trois dimensions, concourant à former chacun de ses angles solides.

Le parallèlépipède est donc égal au produit de ses trois dimensions, dans le même sens que le rectangle est égal au produit de ses côtés. Ici, l'unité du produit étoit le quarré de l'unité linéaire, employée pour mesurer ses côtés. Et dans le parallèlépipède rectangle, l'unité du produit est le cube de l'unité linéaire, avec laquelle sa longueur, sa largeur et sa hauteur avoient été déterminées.

THÉORÈME.

490. *La solidité de tout prisme droit est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

Désignant encore par A l'unité linéaire qu'on a employé pour mesurer les côtés de la base et la hauteur du prisme, la base contiendra le quarré de A un certain nombre de fois ; et la hauteur sera égale à A, prise un autre nombre de fois ; la base pourra donc être exprimée par $m\mathrm{A}^2$, la hauteur par $n\mathrm{A}$, les lettres m et n pouvant désigner des nombres quelconques. On pourra donc mettre sur cette base un nombre m de prismes dont chacun est équivalent au cube de A ; il en résultera un prisme droit, ayant la même base qne le prisme proposé, et l'unité linéaire A pour hauteur. Il faudra prendre ce prisme n fois, pour lui donner une hauteur égale à celle du prisme proposé ; lequel par conséquent contiendra le cube de A autant de fois que le produit mn contient d'unités ; ce qu'on exprime

en

en disant qu'il est égal au produit de sa base par sa hauteur.

THÉORÈME.

491. *Tout prisme oblique peut être considéré comme composé d'autres prismes de même base que lui, dont le nombre est aussi grand qu'on veut, et dont par conséquent l'épaisseur ou la hauteur, de même que le talud, est aussi petite qu'on veut.*

Divisez le côté du prisme en un nombre quelconque de parties, et faites passer par tous les points de division, des plans parallèles à la base. Le prisme se trouvera divisé en un pareil nombre d'autres prismes, ayant la même base que le prisme proposé, et dont l'épaisseur sera d'autant plus petite, que le nombre des parties aura été plus grand. Ainsi, augmentant à volonté le nombre des parties, on peut diminuer l'épaisseur de chaque prisme au-delà de toute quantité assignable. Il en faut dire autant du talud de chacun de ces petits prismes, qui est à sa hauteur, comme le talud du prisme entier est à la hauteur de celui-ci.

THÉORÈME.

492. *Deux prismes qui ont la même base, et qui sont compris entre des plans parallèles, ou qui ont la même hauteur, sont équivalens entr'eux.*

Imaginons l'un et l'autre des deux prismes divisé par des plans parallèles à ceux entre les-

lesquels ils se trouvent compris, en un nombre quelconque de prismes plus petits, mais égaux entr'eux : et comparons dans l'idée un des petits prismes qui résultent de la division de l'un des deux prismes entiers, avec un de ceux qui résultent de la division de l'autre.

Il se peut que ces deux petits prismes soient équivalens. Peut-être aussi ils ne le sont pas: et c'est-ce qu'il faut au moins supposer, afin de prouver que l'inégalité qui dans cette supposition existeroit entr'eux, peut être rendue moindre que toute quantité assignable ; et qu'ainsi de ces deux suppositions, la première est la seule admissible.

Comme les bases et les hauteurs de ces deux prismes ont été supposées égales, l'inégalité qui est entr'eux, si toutes fois il y en a une, ne peut affecter que leurs bords. On peut se représenter cette différence comme un nouveau prisme, ayant pour sa première dimension le contour des deux prismes, leur hauteur pour la seconde, tandis que la troisième dépendroit d'une manière quelconque de l'inégalité de leurs taluds.

Nous n'entreprendrons pas d'évaluer cette dernière dimension. Nous nous contenterons de faire la remarque suivante, qui suffit pour nous conduire à notre but. En augmentant le nombre des divisions, on diminuera à volonté l'épaisseur et le talud de chacun de ces petits prismes : et celui qu'on peut se représenter comme exprimant leur différence, aura en-

enfin une quantité finie pour sa première dimension, mais des quantités entierement évanouissantes pour chacune des deux autres, par la simple supposition d'un nombre de divisions, plus grand que tout nombre assignable.

Après avoir comparé entr'eux les segmens d'une épaisseur évanouissante que l'on peut faire dans les deux prismes, il faut remonter aux prismes entiers. Leur différence sera composée d'un nombre infini de prismes, tel que celui que nous venons de décrire, ayant une quantité finie pour l'une de leurs trois dimensions, et des quantités évanouissantes pour les deux autres. Ajoutant ensemble tous ces prismes, il en résultera un corps, ayant des quantités finies pour deux de ses dimensions, tandis que la troisième restera toujours une quantité évanouissante en comparaison des deux autres.

Ainsi donc, quand même on auroit commis une erreur, en supposant chaque segment de l'un des deux prismes égal au segment correspondant de l'autre, il est prouvé par ces considérations qu'on peut diminuer cette erreur à volonté, en supposant un plus grand nombre de divisions; et qu'ainsi, en employant un nombre de divisions plus grand que tout nombre assignable, cette erreur pourra être rendue plus petite que toute quantité assignable.

La différence entre les deux prismes est donc égale à *zéro*; et les prismes eux-mêmes seront égaux entr'eux.

En

En admettant dès le commencement la notion d'infini, à laquelle il est indispensable de recourir, la démonstration se trouvera énoncée en ces termes.

Les deux prismes ayant la même base, et se trouvant compris entre les mêmes parallèles, il est clair qu'en y faisant passer un nombre infini de surfaces planes, parallèles à la base commune, on obtiendra dans l'un et dans l'autre des deux prismes un nombre infini de sections égales entr'elles.

Les deux prismes pourront donc être considérés comme composés d'un nombre infini, mais égal de surfaces, qui toutes sont égales à la base commune, et par conséquent égales entr'elles; et toute la différence entre les deux prismes viendra de ce que ces surfaces sont autrement disposées dans l'un que dans l'autre.

Ainsi, si l'on ne considère que le volume ou la capacité des deux prismes, ils seront équivalens entr'eux.

Cette démonstration est donc fondée sur un principe qu'on est obligé d'admettre, et dont on ne peut pas se passer dans les démonstrations qui concernent les solides : *Deux quantités sont égales, lorsqu'on peut prouver, que la différence qu'il faudroit admettre entr'elles, est moindre que toute quantité assignable.*

THÉORÈME.

493. *Le volume de tout prisme, droit ou oblique, est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

Le théorème est déjà prouvé pour le prisme droit (490). Le prisme oblique est égal au prisme droit de même base et de même hauteur (492). Il a donc aussi pour mesure le produit de la base par la hauteur.

494.

494. *Corollaire* I. Deux prismes quelconques sont donc entr'eux dans le rapport composé de celui de leurs bases, et de celui de leurs hauteurs.

495. *Corollaire* II. Deux prismes qui ont des bases égales, mais des hauteurs différentes, sont entr'eux dans le rapport de leurs hauteurs.

496. *Corollaire* III. Deux prismes qui ont des bases inégales, mais qui sont de même hauteur, ou qui se trouvent compris entre des plans parallèles, sont entr'eux dans le rapport de leurs bases.

THÉORÈME.

497. *Si une pyramide quelconque SABC (Fig. 111.) est coupée par un plan parallèle à la base, qui rencontre en H la perpendiculaire SG abaissée du sommet S sur cette base; la section DEF qui en résulte dans la pyramide, est un polygone semblable à la base ABC; et il est à cette base dans le rapport du quarré de SH au quarré de SG.*

Le théorème est identiquement le même que celui qui a été déjà démontré en (350), suivi de son corollaire (351). Les lignes SDA, SEB, SFC de l'un et de l'autre, sont les arêtes des deux pyramides SDEF et SABC, ayant l'angle solide S commun entr'elles, et traversées par les plans parallèles des deux polygones DEF et ABC, lesquels par conséquent seront semblables, et comme tels, se trouveront entr'eux dans

dans le rapport des quarrés de deux côtés homologues quelconques, et par conséquent aussi des hauteurs SH et SG des deux pyramides.

498. *Corollaire.* Comme le nombre des sections qu'on peut imaginer parallèles à la base de la pyramide, est arbitraire, et qu'on peut le supposer aussi grand qu'on veut, toute pyramide pourra donc être considérée comme un assemblage de plans polygones, disposés les uns sur les autres depuis la base jusqu'au sommet, et décroissant dans le rapport des quarrés de leurs distances à ce même sommet.

THÉORÈME.

499. *Les pyramides qui ont la même base ou des bases égales, et qui sont comprises entre des plans parallèles, sont équivalentes entr'elles. (Fig. 134.)*

Soient les deux pyramides SABC et TABC, ayant la même base ABC et leurs sommets disposés sur un plan parallèle à cette base. Abaissez de l'un des deux sommets, tel que S, sur le plan de la base, la perpendiculaire SM. Par un point quelconque N de cette perpendiculaire, menez un plan parallèle à la base, lequel traversera les deux pyramides, et fera dans l'une la section DEF, dans l'autre, la section GHI.

D'après le théorème précédent, ces deux sections, semblables toutes les deux à la base ABC, seront à cette base dans le même rapport, savoir celui des quarrés des deux hauteurs

teurs SN et SM. Les deux sections seront donc égales entr'elles; et il en sera de même de toutes les autres sections, faites dans les deux pyramides, à une distance déterminée du plan de leur base commune.

Les deux pyramides pourront donc être regardées comme des assemblages de polygones égaux, disposés les uns sur les autres, depuis la base jusqu'au plan commun de leurs sommets; dont le nombre, quoique infini, est cependant le même de part et d'autre, à cause de l'élévation égale du sommet de chaque pyramide sur la base commune.

Les deux pyramides seront donc équivalentes.

Le nombre de ces plans doit être supposé infini de part et d'autre, afin que chaque couche pyramidale, qui dans le cas d'un nombre fini de sections auroit été une véritable pyramide tronquée, puisse être regardée comme une simple surface d'une épaisseur évanouissante, ou, ce qui revient au même, sans épaisseur. S'il restoit quelque doute sur le terme et la notion d'*infini*, nous renvoyons au théorème (492), dont la démonstration, quoique faite pour le cas du prisme, est entièrement applicable à la pyramide.

500. *Corollaire.* La démonstration auroit été la même, si les deux pyramides, au lieu d'une base commune, avoient eu des bases égales ou équivalentes. Il suffit d'ailleurs que deux pyramides ayent la même hauteur, pour être comprises entre des plans parallèles, dès qu'elles sont établies sur les bases, auxquelles se rapportent ces hauteurs. Delà résulte le théorème suivant:

THÉO-

THÉORÈME.

501. *Deux pyramides qui ont des bases* ıuivalentes, *et des hauteurs égales, sont équi-* ılentes *entr'elles.*

THÉORÈME.

502. *Tout prisme triangulaire peut être* écomposé *en trois pyramides triangulaires* ıuivalentes *entr'elles, et dont deux ont la* ıême *base et la même hauteur que le prisme.* (*Fig.* 135.)

De l'arête postérieure AC de la base ABC, u sommet opposé E pris dans l'autre base)EF, menez le plan triangulaire AEC. Le ırisme se trouvera partagé en deux corps, 'un désigné par les lettres ABCE, l'autre ayant)our sommets les points ACDEF.

Le premier est une pyramide triangulaire, aquelle posée sur la base ABC, aura le point pour sommet. Cette pyramide aura donc a même base et la même hauteur que le ırisme.

L'autre est une pyramide quadrangulaire, yant pour base la face postérieure du prisme DFC, et pour sommet le point E, dans lequel concourent les arêtes AE, CE, FE, DE, ienées des quatre angles de la base.

De la diagonale AF de la base au sommet , menez le plan triangulaire AEF. Vous en ɛrez deux pyramides triangulaires, l'une comırise entre les sommets ADEF, l'autre ayant)our sommets les points ACEF.

L'une ADEF, posée sur la base DEF, aura son sommet en A. Cette pyramide aura donc, de même que la première ABCE, la même base et la même hauteur que le prisme.

L'autre pyramide ACEF ne pourra pas compter la base du prisme parmi ses quatre faces, qui sont les triangles ACE, CEF, ACF, AEF. Cette pyramide cependant sera équivalente à chacune des deux autres ABCE et ADEF.

Car mise à côté de la première ABCE, en les posant sur les bases égales CEF et BCE, faisant ensemble le parallélogramme BCEF, elles auront pour sommet commun le point A : donc ayant des bases égales et la même hauteur, elles seront équivalentes.

Cette même pyramide ACEF, mise à côté de la seconde pyramide ADEF, en les posant sur les bases égales ADF et ACF, qui font ensemble le parallélogramme ADFC, aura le même sommet qu'elle, savoir le point E. Donc, ayant la même hauteur, et des bases égales, ces deux pyramides seront encore équivalentes.

Le prisme triangulaire proposé sera donc la somme des trois pyramides triangulaires ABCE, ADEF et ACEF, équivalentes entr'elles, et dont les deux premières ont la même base et la même hauteur que le prisme ; ce qui fait l'énoncé du théorème.

503. *Corollaire* I. Une pyramide triangulaire quelconque étant proposée, on pourra tou-

toujours imaginer un prisme de même base et de même hauteur, dont par conséquent cette pyramide sera le tiers.

504. *Corollaire* II. Et comme tout prisme est égal au produit de la base par la hauteur, il s'ensuit que toute pyramide triangulaire est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

505. *Corollaire* III. Or, quelque soit le nombre des côtés d'une pyramide, on pourra toujours la partager en des pyramides triangulaires, par des plans dirigés de son sommet aux diagonales de la base. Ces pyramides partielles auront pour sommet commun celui de la pyramide proposée, et la totalité de leurs bases sera la base de la pyramide entière. Il en résulte le théorème suivant.

THÉORÈME.

506. *Le volume de toute pyramide, quelque soit le nombre de ses faces, est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

507. *Corollaire* I. Deux pyramides sont donc entr'elles dans le rapport composé de celui de leurs bases, et de celui de leurs hauteurs.

508. *Corollaire* II. Si les bases sont égales, le rapport des pyramides sera celui de leurs hauteurs.

509. *Corollaire* III. Et si les hauteurs sont égales, le rapport des pyramides sera celui de leurs bases.

THÉO-

THÉORÈME.

510. *Toute pyramide triangulaire tronquée à bases parallèles peut être décomposée en trois pyramides entières de la même hauteur qu'elle, mais ayant des bases inégales, savoir, la première et la seconde, les deux bases opposées de la pyramide; et la troisième, la moyenne proportionnelle entre les deux bases.* (*Fig.* 136.)

Soit la pyramide tronquée ABCDEF, ayant pour ses deux bases les triangles parallèles et semblables ABC, DEF; et pour ses faces latérales les trapèzes ABDE, BCEF, ACDF.

Menant du sommet E de la base supérieure à l'arête opposée AC de la base inférieure, le plan triangulaire AEC, on en détachera d'abord la pyramide triangulaire ABCE, ayant son sommet en E, et pour base le triangle ABC, base inférieure de la pyramide. Elle aura donc la même base et la même hauteur que la pyramide tronquee: nous la désignerons par P.

Il restera la pyramide quadrangulaire ADEFC, ayant son sommet en E, et pour base le trapèze ADFC, qui est une des faces latérales de la pyramide. Menant un plan du sommet E à la diagonale AF de la base, on obtiendra la section triangulaire AEF, qui la partagera en deux pyramides triangulaires, savoir ADFE et ACFE.

La pyramide ADFE, ayant le point A pour sommet, et pour base le triangle DEF, pourra donc être regardée comme ayant la même hau-

hauteur que la pyramide tronquée ; nous la désignerons par R.

La troisième pyramide ACFE, que nous nommerons Q, ne comptera parmi ses faces aucune des deux bases de la pyramide tronquée proposée.

Pour comparer entr'elles les deux pyramides P et Q, posons les sur les deux bases BCE et FCE, faisant ensemble le trapèze BCEF. Elles auront le point A pour sommet commun ; et étant de la même hauteur, elles seront entr'elles comme les bases BCE et FCE (509). Mais ces deux triangles, compris entre les parallèles BC et EF, et ayant ainsi la même hauteur, seront entr'eux comme leurs bases (152), qui sont les lignes BC et EF. On aura donc la proportion P:Q=BC:EF.

Pour comparer entr'elles les pyramides Q et R, nous les établirons sur les bases ACF et ADF, faisant ensemble le trapèze ACDF. Ayant alors le point E pour sommet commun, elles seront entr'elles comme ces mêmes bases, savoir les triangles ACF et ADF (509). Mais ces triangles, compris eux-mêmes entre les parallèles AC et DF, seront entr'eux comme leurs bases (152), savoir les lignes AC et DF. On aura donc la proportion Q:R=AC:DF.

Or, les triangles ABC et DEF étant semblables entr'eux par supposition (497), les deux rapports BC:EF et AC:DF seront égaux entr'eux. On aura donc aussi P:Q=Q:R. La troi-

troisième pyramide Q sera donc moyenne proportionnelle entre les deux autres P et R.

Donc, en lui supposant la même hauteur, il faudra lui donner pour base, une moyenne proportionnelle entre les deux bases de la pyramide tronquée. Cette pyramide sera donc la somme de trois pyramides entières, ayant la même hauteur qu'elle, et pour leurs trois bases, les deux bases de la proposée, et une moyenne proportionnelle entre les deux bases.

511. *Corollaire.* Ce théorème doit nécessairement s'étendre à toute autre pyramide tronquée à bases parallèles, parcequ'à cette dernière on pourra toujours substituer une pyramide triangulaire, ayant la même hauteur, et une base équivalente à la sienne.

THÉORÈME.

512. *Tout prisme triangulaire ABCDEF, tronqué par un plan DEF, qui n'est point parallèle à celui de la base ABC, est la somme de trois pyramides triangulaires, ayant pour base commune celle du prisme, savoir le triangle ABC, et pour sommets les trois points D, E, F.* (*Fig.* 137.)

Conduisant de l'un des trois sommets, tel que E, un plan vers l'arête opposée AC, appartenant à la base du prisme, celui-ci sera partagé en deux pyramides, l'une triangulaire ABCE, l'autre quadrangulaire ADFCE. Menant ensuite du sommet E de cette dernière, un plan suivant la diagonale AF de sa base, on en fera encore deux pyramides triangulaires,

laires, l'une AFEC, l'autre ADFE. Moyennant les deux plans AEC et AEF, le prisme tronqué sera donc décomposé dans les trois pyramides triangulaires ABCE, AFEC et ADFE, qu'il ne sera pas difficile de réduire aux trois pyramides, énoncés dans le théorème, ayant ABC pour base commune, et pour leurs sommets respectifs les points D, E, F, savoir: les pyramides ABCE, ABCF et ABCD.

La première ABCE, ayant ABC pour base, et son sommet en E, n'a pas besoin de réduction.

Comparant ensuite la seconde pyramide AFEC à la pyramide ABCF, on verra qu'en leur donnant le point A pour sommet commun, elles auront pour leurs bases respectives les triangles FEC et BCF, ayant la même ligne CF pour base, et compris entre les parallèles BE et CF. Ces deux pyramides, ayant des bases égales et le même sommet, seront par conséquent équivalentes entr'elles.

Comparant enfin la troisième pyramide ADFE à la pyramide ABCD, on trouvera qu'en leur donnant pour bases respectives les triangles ADF et ADC, qui doivent être équivalentes, comme ayant la même base AD, et comprises entre les mêmes parallèles AD et CF, les sommets E et B de ces pyramides seront disposés sur la ligne BE, parallèle au plan commun de leurs deux bases, qui est le parallélogramme ADFC. Ces deux pyramides seront donc encore équivalentes.

Le

Le prisme tronqué sera donc la somme de trois pyramides triangulaires, ayant ABC pour base commune, et pour leurs sommets respectifs les trois points D, E, F; et on aura sa solidité, en multipliant le tiers de sa base, par la somme des trois lignes qui expriment les hauteurs des trois sommets D, E, F au-dessus de cette base ABC.

513. *Corollaire.* Si le prisme est perpendiculaire sur la base ABC, le volume du prisme tronqué sera égal au produit de la base ABC, par le tiers de la somme des trois arêtes mêmes AD, BE et CF.

THÉORÈME.

514. *Les mêmes choses étant supposées, la surface de la base ABC est à celle de la section DEF, comme la base NO du triangle rectangle MNO est à son hypoténuse MO; l'angle O exprimant l'inclinaison du plan de la section DEF vers celui de la base ABC.* (*Fig.* 137. 138.)

Le prisme étant supposé droit, ce qui rendra les arêtes AD, BE et CF perpendiculaires sur la base ABC, et l'angle O étant supposé égal à celui que fait le plan de la section DEF avec celui de la base ABC; élevez dans les points A, B, C (*Fig.* 138.) les perpendiculaires AD, BE, CF, égales aux arêtes AD, BE, CF du prisme; et de ces mêmes points abaissez sur l'hypoténuse les perpendiculaires AG, BH, CI. Ces perpendiculaires exprimeront en même tems les hauteurs respectives des trois points

A,

A, B, et C *(Fig. 137.)* au-dessus du plan de la section DEF, qui est supposé faire avec celui de la base ABC, un angle égal à l'angle linéaire O.

Le théorème précédent nous apprend que pour trouver le volume du prisme tronqué, il est indifférent de lui donner pour base le triangle ABC, ou bien le triangle DEF; la démonstration étant également applicable aux deux cas. Dans le premier cas, ce volume sera égal au tiers du produit de la base ABC, par la somme des trois arêtes AD+BE+CF. Dans le second, il sera égal au tiers du produit de la section DEF, par la somme des trois perpendiculaires AG+BH+CI. Egalant les deux produits, on aura la proportion ABC: DEF=AG+BH+CI:AD+BE+CF.

Mais les triangles AGD, BHE, CIF étant semblables entr'eux et au triangle ONM, les rapports AG:AD, BH:BE et CI:CF seront égaux entr'eux et au rapport NO:MO. On aura donc aussi AG+BH+CI:AD+BE+CF= NO:MO; et on en tire immédiatement ABC: DEF=NO:MO, ce qui est conforme à l'énoncé du théorème.

515. *Corollaire.* Et comme dans le cas d'un prisme, ayant un nombre de côtés quelconque, tant la base que la section seroient décomposables en un nombre égal de triangles, pour lesquels ce même rapport auroit toujours lieu, comme dépendant uniquement de l'inclinaison mutuelle des deux plans, on en retire le théorème général qui suit.

THÉO-

THÉORÈME.

516. *Si un prisme droit quelconque est coupé par un plan quelconque, qui fait avec la base un angle égal à O, la section sera à la base dans le rapport constant MO : NO. (Fig. 137. 138.)*

Euler, dans son *Analyse des infinis*, a démontré le premier ce théorème dans le cas très-particulier du cylindre. Il s'étend à tous les corps prismatiques quelconques : et dans cette généralité il est encore démontrable par les seuls secours de la Géométrie élémentaire.

THÉORÈME.

517. *La surface convexe ou latérale d'un prisme quelconque se trouve, en menant un plan perpendiculairement aux arêtes du prisme, et en multipliant la circonférence de la section qui en résulte, par l'arête du prisme.*

Car d'après cette construction, le contour de cette section ne sera autre chose que la somme des lignes, qui étant menées perpendiculairement aux arêtes du prisme, exprimeront les hauteurs des parallélogrammes qui composent sa surface latérale; et comme les bases de ces parallélogrammes sont égales entr'elles et à l'arête latérale du prisme, on en trouvera la surface totale, en multipliant cette arête par le contour de la section qui lui est perpendiculaire.

518. *Corollaire.* La surface d'un prisme droit, qui n'est composée que de rectangles,

est

est donc égale au contour de la base, multiplié par sa hauteur.

Le contour de la section, perpendiculaire aux arêtes du prisme oblique, n'est dans aucun rapport constant avec celui de la base du prisme. Et quand même cette dernière seroit un polygone régulier, cette section seroit encore un polygone très-irrégulier, ayant ses côtés, de même que ses angles inégaux entr'eux.

THÉORÈME.

528. *La surface d'une pyramide régulière, sans y comprendre la base, est égale à la moitié du produit du contour de cette base, multipliée par la perpendiculaire abaissée du sommet sur un des côtés de la base, et qu'on nomme apothême.* (*Fig.* 139.)

Prenons pour exemple la pyramide SABCDE, ayant pour base le polygone régulier ABCDE, et pour sommet le point S, situé dans la perpendiculaire qui est élevée dans le centre de la base. La surface sera donc composée de triangles isoscèles égaux entr'eux, ayant chacun pour mesure la moitié du produit de sa base, par la ligne SL, abaissée perpendiculairement du sommet S sur cette base. La surface entière, sans y comprendre la base, sera donc égale à la moitié du produit du contour entier de cette base, par l'apothême SL.

THÉORÈME.

529. *La surface d'une pyramide régulière tronquée à bases parallèles, est égale à la demi-somme des contours des deux bases, par la hau-*

pris *deux* à *deux*, sont semblables entr'eux: savoir les triangles SAB et *sab;* les triangles SBC et *sbc;* les triangles SCA et *sca;* enfin les triangles ABC et *abc*.

Je remarque d'abord que la ressemblance des deux derniers triangles, est une conséquence nécessaire de celle des autres. Car ceux-ci étant respectivement semblables entr'eux, les angles triëdres qui en résultent aux deux sommets S et *s* seront parfaitement égaux: et il s'ensuit que les faces respectives qui concourent à les former, seront également inclinées dans l'un et dans l'autre, et qu'elles formeront des angles plans, respectivement égaux entr'eux.

Donc, les triëdres en A et en *a* ayant des angles égaux compris entre des côtés égaux, seront parfaitement égaux entr'eux; d'où il suit que les angles linéaires BAC et *bac* seront égaux de même.

On prouvera de même la parfaite égalité des triëdres B et *b*, de même que des triëdres C et *c;* et on en conclurra l'égalité respective des angles linéaires ABC et *abc*, ACB et *acb*.

Il s'ensuivra de plus que les deux bases ABC et *abc* seront également inclinées vers les autres faces dans l'une et dans l'autre des deux pyramides; et qu'ainsi les deux pyramides, ayant tous leurs angles linéaires et tous leurs angles plans, respectivement égaux entr'eux, seront certainement semblables.

En réduisant à l'égalité des angles linéaires, semblablement disposés dans les faces des deux pyramides, la ressemblance de leurs faces respectives, on trouvera que le nombre des angles linéaires, indépendans l'un des autres, et pris dans les faces de l'une des deux pyramides, qui doivent être égaux aux angles homologues pris dans les faces de l'autre, doit être essentiellement de *cinq*.

En

En effet, supposons que les deux pyramides triangulaires SABC et *sabc*, ayent les angles linéaires qui suivent égaux entr'eux : ASB=*asb*; BSC=*bsc*; ASC=*asc*; ABS=*abs*; CBS=*cbs*. Cela étant :

1.° Les angles triëdres S et *s* des deux pyramides, compris entre les angles linéaires égaux, seront parfaitement égaux entr'eux.

2.° Donc les angles plans, formés aux arêtes SA et *sa*, SB et *sb*, SC et *sc*, seront respectivement égaux entr'eux.

3.° Les triangles SAB et *sab* seront semblables, ayant deux angles de l'un égaux aux angles homologues de l'autre.

4.° Il en sera de même des triangles SBC et *sbc*.

5.° Les angles triëdres en B et en *b* seront donc égaux, ayant les angles plans ASBC et *asbc*, égaux et compris entre des angles linéaires respectivement égaux de même.

6.° Donc les angles plans SABC et SBCA seront respectivement égaux aux angles plans *sabc* et *sbca*.

7.° Ainsi les angles triëdres en A et *a*, ayant les deux angles linéaires égaux SAB et *sab*, compris entre des angles plans égaux, seront parfaitement égaux entr'eux.

8.° Il en sera de même des angles triëdres B et *b*.

9.° Donc enfin, les angles linéaires homologues qui restent dans les deux pyramides, et dont l'égalité n'avoit pas encore été démontrée, seront respectivement égaux entr'eux : et la parfaite ressemblance des deux pyramides sera démontrée.

En-

Enfin n'oublions pas ce qui a été déjà démontré dans le chapitre des triangles semblables, que deux côtés d'un polygone, proportionnels aux deux côtés homologues de l'autre, équivalent pour la démonstration de la ressemblance à l'égalité de deux angles homologues.

On pourra donc comprendre dans le seul théorème qui suit, les conditions principales, sous lesquelles deux pyramides triangulaires sont semblables entr'elles.

THÉORÈME.

531. *Deux pyramides triangulaires sont semblables; dans les cas qui suivent.*

Prémièrement: lorsqu'elles ont deux angles trièdres compris entre des faces respectivement semblables. Car dans ce cas tous les angles trièdres seront respectivement égaux, étant formés par des angles linéaires respectivement égaux entr'eux.

Secondement: lorsque deux angles trièdres de l'une sont égaux à deux angles trièdres de l'autre. Car chacun de ces deux angles étant formé par trois angles linéaires, on aura donc six angles linéaires de l'une, égaux aux six angles homologues de l'autre: et c'est déjà plus qu'il n'en faut pour la ressemblance.

Troisièmement: lorsque les six angles plans, formés aux arêtes de l'une des deux pyramides, et qui expriment les inclinaisons respectives de ses faces, sont égaux aux angles homologues de l'autre. Car il suivra de cette supposition, que l'une des deux pyramides pourra toujours

prendre une position telle que ses quatre faces soient parallèles aux faces homologues de l'autre. Dans cette position, les six arêtes de l'une seront parallèles aux six arêtes homologues de l'autre. Donc, tous les angles linéaires semblablement disposés dans les faces homologues des deux pyramides, étant égaux *deux à deux*, les deux pyramides seront semblables.

Quatrièmement: lorsque les six arêtes homologues de l'une sont proportionnelles aux six arêtes homologues de l'autre. Car leurs angles solides homologues étant compris dans cette supposition entre des faces triangulaires semblables et semblablement disposées, les deux pyramides seront semblables.

532. *Corollaire.* Lorsqu'on coupe une pyramide triangulaire par un plan parallèle à sa base, la pyramide retranchée sera semblable à la pyramide entière. Le théorème s'étend à toute sorte de pyramides, quelque soit le nombre de leurs côtés; comme nous verrons bientôt.

THÉORÈME.

533. *Les surfaces des pyramides semblables sont entr'elles dans le rapport des quarrés de leurs côtés ou arêtes homologues.*

Car ces surfaces étant composées d'un pareil nombre de triangles semblables et semblablement disposés, qui tous sont entr'eux dans le rapport des quarrés de leurs côtés homologues, qui est le même pour tous en vertu de la supposition, leurs surfaces entières doivent naturellement suivre le même rapport.

THÉO-

THÉORÈME.

534. *Deux pyramides triangulaires SABC et SDEF, qui ont l'angle trièdre en S de commun entr'eux, sont entr'elles dans le rapport composé des trois rapports SA:SD, SB:SE, et SC:SF, qui sont ceux des arêtes qui comprennent cet angle trièdre; c'est-à-dire, on aura SABC:SDEF = SA×SB×SC:SD×SE×SF. (Fig. 141.)*

De l'un des trois sommets E, pris sur la base DEF de l'une, menez un plan à l'arête opposée AC de l'autre. Il en résultera une troisième pyramide SAEC, moyenne entre les deux pyramides SABC et SDEF, et qu'on pourra leur comparer de la manière suivante.

Donnons aux deux pyramides SABC et SAEC le sommet commun C. Leurs bases SAB et SAE, situées dans un même plan, exprimeront donc le rapport qui existe entr'elles (509). Ces deux triangles, qui ont la même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases SB et SE. (152). On aura donc SABC:SAEC=SB:SE.

Donnons aussi aux deux pyramides SAEC et SDEF le sommet commun E. Leurs bases SAC et SDF, situées dans le même plan, exprimeront le rapport qui existe entr'elles (509). Ces deux triangles, ayant l'angle commun ASC ou DSF, seront entr'eux comme les produits qui les comprennent (181): ce qui donne SAEC:SDEF=SA×SC:SD×SF.

Multipliant par ordre et supprimant la pyramide commune SAEC, se trouvant à la fois

parmi les antécédents et parmi les conséquents, il en résultera SABC : SDEF = SA × SB × SC : SD × SE × SF ; ce qui fait l'énoncé du théorème.

THÉORÈME.

535. *Les pyramides triangulaires semblables sont entr'elles comme les cubes de leurs côtés homologues.*

Car les pyramides triangulaires ne pouvant être semblables, à moins que leurs angles trièdres homologues ne soient égaux entr'eux, et qu'il ne règne le même rapport entre les arêtes homologues qui comprennent ces trièdres égaux, le rapport composé du théorème précédent deviendra celui des cubes des arêtes homologues, dans le cas où les deux pyramides sont semblables entr'elles.

DÉFINITION.

536. *Deux polyèdres quelconques sont semblables entr'eux, lorsqu'ils sont composés d'un pareil nombre de pyramides triangulaires semblables, et semblablement disposés.*

537. *Corollaire.* Les polyèdres semblables auront par conséquent leurs faces homologues semblables entr'elles ; les angles linéaires, les angles plans, les angles plano-linéaires, les angles solides enfin qui en résultent, et qui sont semblablement disposés dans les deux polyèdres, égaux entr'eux : et il règnera partout le même rapport entre leurs arêtes homologues, leurs diagonales homologues, et les lignes

lignes en général qui seront semblablement disposées dans l'un et dans l'autre.

THÉORÈME.

538. *Les polyèdres semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés ou arêtes homologues.*

Car composés d'un pareil nombre de pyramides triangulaires semblables, ils seront entr'eux dans le rapport de ces dernières, c'est-à-dire, dans celui des cubes de leurs côtés ou arêtes homologues.

539. *Corollaire.* Il est donc très facile d'exprimer en lignes le rapport de deux polyèdres semblables. Ce problème rentre dans le problème général, de réduire au rapport simple de deux lignes un rapport composé quelconque.

Il n'en est pas de même du problême suivant, qu'on peut regarder comme l'inverse du précédent.

PROBLÈME.

540. *Etant donné le rapport de deux polyèdres semblables M : N, construire géométriquement, c'est-à-dire, par la règle et le compas seul, celui de leurs côtés homologues A : B.*

Les polyèdres semblables étant entr'eux dans le rapport des cubes de leurs côtés homologues, on aura M:N, comme le cube de A est au cube de B. On aura donc aussi réciproquement A:B, comme la racine cubique de M est à celle de N.

La solution arithmétique reviendra à une simple extraction de racine cubique; ce qui ne présente aucune difficulté. La construction géométrique exigeroit

roit qu'on put trouver de même le côté d'un cube égal à un parallèlépipède proposé; ce qu'il est impossible de faire, tant qu'on ne veut employer que la règle et le compas.

Les anciens qui s'en sont occupés, tels que *Hippocrate de Chios*, *Archytas de Tarente*, *Platon* qui étoit l'élève de celui-ci, ont bien reconnu l'identité de ce problême avec celui d'insérer deux moyennes proportionnelles x, y, entre les deux lignes données M, N. Ayant alors les trois rapports égaux entr'eux, savoir $M:x$, $x:y$, $y:N$, on en tirera les rapports suivans qui seront égaux de même, savoir $M^3 : x^3$, $M^2 : y^2$, et $M : N$. Ainsi, les lignes M et N exprimant le rapport simple des deux polyèdres, le rapport $M:x$ ou $y:N$ sera celui de leurs côtés homologues; et le rapport $M : y$ ou $x : N$ sera celui de leurs surfaces. Mais par cette raison même il est aussi difficile de construire géométriquement l'un des deux problêmes, que d'exécuter la construction graphique de l'autre.

541. Nous venons de voir que les égalités entre les angles linéaires respectifs, nécessaires pour constater la ressemblance parfaite entre deux polyèdres, doivent être dans la pyramide triangulaire au nombre de *cinq*: et l'on peut observer que ce nombre est celui de ses arêtes, moins *une*. Cette proposition est susceptible d'une généralité infiniment plus grande, parce-qu'elle s'étend à tous les polyèdres sans exception. Il en résulte le théorème suivant, que nous donnons pour un des plus importans de la Géométrie entière.

THÉORÊME.

542. *Le nombre des données nécessaires et entièrement indépendantes entr'elles, pour déter-*

terminer un polyèdre quelconque, parmi tous ceux de la même espèce, est égal au nombre de ses arêtes.

Ce très-beau théorème est dû à *Legendre*; et nous renvoyons à ses Élémens de Géométrie, Note VIII, pour en avoir la démonstration, que l'on trouvera fondée en partie sur le *grand théorème d'Euler* (477) concernant les faces, les arêtes et les sommets d'un polyèdre, savoir $F+S=A+2$. Nous supprimons de même les théorèmes généraux sur le nombre des lignes diagonales et des plans diagonaux qu'il est possible de mener dans un polyèdre quelconque, et qu'on peut également déduire de la proposition d'Euler. Cette proposition nous apprendroit encore, à trouver les nombres des sommets triëdres, tetraëdres, pentaëdres etc. d'un solide, dans lequel on connoit les nombres des triangles, des quadrilatères, des pentagones etc. qui composent sa surface; problême d'analyse indéterminée, qui donne lieu à un assez grand nombre de conséquences neuves et intéressantes. La suite de ce cours nous permettra de revenir à ces différens objets.

CHAPITRE DIX-HUITIEME.

LES TROIS CORPS RONDS.

DÉFINITIONS.

543. Nous entendons ici par *corps rond*, tout corps produit par la revolution d'une surface plane autour d'une ligne quelconque, qui prend alors le nom d'axe.

544. *Corollaire.* Tout corps rond peut donc être regardé comme composé d'une infinité de cercles

ABC autour d'un de ses côtés, tel que AB. (*Fig.* 143.)

550. *Corollaire* I. Toutes les sections coniques, faites perpendiculairement à l'axe du cône, et par conséquent parallèles à la base, sont des cercles, dont les rayons décroissent depuis la base jusqu'au sommet, dans le rapport même de leurs distances à ce sommet.

551. *Corollaire* II. Toutes les sections, faites suivant l'axe même AB du cône, sont des triangles isoscèles, doubles du triangle générateur ABC.

552. *Corollaire* III. Toutes les lignes, menées du sommet A du cône, à un point quelconque de la circonférence de la base, sont des lignes droites, égales à l'hypoténuse AC du triangle générateur ABC.

Le cône oblique est celui dont l'axe fait un angle oblique avec le plan du cercle qui lui sert de base. Un tel cône n'est pas un corps rond et ne peut guères entrer dans le plan d'une Géométrie élémentaire.

Toutes les sections, faites dans le cône droit ou oblique, qui ne sont menées, ni suivant l'axe du cône, ni parallèlement à la base, sont des lignes courbes, connues sous le nom de *sections coniques*, et dont l'analyse est un des principaux objets de la haute Géométrie.

553. Sous le nom de *cône tronqué* on entend toujours un cône droit, tronqué parallèlement à la base. On peut se le représenter comme produit par la révolution du trapèze rectangle BDEC, autour de l'axe BD. (*Fig.* 143.)

Le

Le cercle devant être considéré comme un polygone régulier d'un nombre infini de côtés, les théorèmes qui concernent les surfaces et les volumes des cylindres et des cônes rentreront dans la classe générale de ceux qui ont déjà été démontrés pour les prismes et les pyramides. Nous pouvons donc proposer sans démonstration les théorèmes qui suivent.

THÉORÈME.

554. *La surface convexe du cylindre droit est égale au produit de la circonférence de sa base, par l'axe du cylindre* (518).

Ainsi désignant par r le rayon de la base, par h la hauteur ou l'axe du cylindre, sa surface convexe sera égale à $2\pi rh$.

La surface du cylindre oblique dépend de la rectification de l'ellipse, qu'on obtient en coupant le cylindre perpendiculairement à son axe (517); problème difficile, même parmi ceux de haute Analyse.

THÉORÈME.

555. *Le volume du cylindre est égal au produit de la base par la hauteur* (493).

Il sera donc πrrh.

La hauteur du cylindre droit est l'axe même du cylindre. Dans le cylindre oblique, c'est la perpendiculaire abaissée d'une base sur l'autre.

THÉORÈME.

556. *La surface convexe du cône est égale au produit de la demi-circonférence de sa base par le côté du cône.*

Car

Car la surface convexe de la pyramide régulière est égale à la demi-circonférence de la base, multipliée par l'apothême (528). Plus la pyramide a de côtés, et plus la différence entre son arête et son apothême devient insensible. Dans le cône enfin, l'arête et l'apothême se trouvant entièrement confondus avec le côté du cône, c'est en multipliant ce côté par la demi-circonférence de la base, qu'on trouvera sa surface convexe.

Quant à celle du cône oblique, elle est l'objet d'un problême très-difficile de haute Analyse.

THÉORÈME.

557. *La surface convexe du cône tronqué se trouve, en multipliant la demi-somme des circonférences des deux bases par le côté du cône tronqué* (529).

Ce qui étoit la hauteur de chaque trapèze de la surface, tant que la base de la pyramide étoit un polygone régulier d'un nombre fini de côtés, devient côté du cône tronqué, lorsque ce polygone devient cercle.

THÉORÈME.

558. *Le volume du cône est égal au tiers du produit de la base par la hauteur, qui dans le cas d'un cône droit est l'axe même du cône* (506).

THÉORÈME.

559. *Le volume du cône tronqué se trouve, en multipliant par le tiers de son axe, qui dans le cône droit est la distance des centres des deux bases, la somme de ces bases, plus une moyenne proportionnelle entre les surfaces de ces mêmes bases* (510).

Donc,

Donc, désignant par h la hauteur du cône tronqué; par r et s les rayons des bases; les surfaces de ces bases seront πrr et πss; leur moyenne proportionnelle πrs; le volume du cône tronqué sera donc égal au tiers de πh, multiplié par $rr+rs+ss$.

DÉFINITIONS.

560. La *sphère* est le corps rond, produit par la révolution du demi-cercle AMB autour du diamètre AB. *(Fig. 144.)*

Le centre, le diamètre et le rayon de la sphère, sont les mêmes que le centre, le diamètre et le rayon du cercle générateur. La sphère peut être considérée comme composée d'une infinité de sections circulaires, parallèles entr'elles, et perpendiculaires à l'axe de rotation ACB, qui ont pour rayons, décroissans depuis le centre C jusqu'aux deux sommets A et B, les perpendiculaires PM, abaissées d'un point quelconque de la circonférence du demi-cercle générateur, sur le diamètre AB.

561. Le *segment sphérique* est la portion de la sphère, produite par la revolution du trapèze circulaire PQMN, ou CPMD, ou CQND, autour de l'axe de rotation AB.

Le segment sphérique est donc compris entre deux sections circulaires parallèles, qui en sont les bases opposées. La portion de la sphère, produite par la révolution du demi-segment circulaire APM autour de l'axe commun, est aussi un segment sphérique, qui s'étend alors depuis la section circulaire dont le rayon est PM, jusqu'à l'extrémité de l'axe A.

562. *La zone* est la surface convexe du segment sphérique, produite par la révolution de l'arc MN ou MD autour de l'axe commun.

Si

Si le segment s'étend jusqu'à l'extrémité A de l'axe, la zone, produite alors par la révolution de l'arc entier AM autour de l'axe commun, prend le nom de *calotte*, dont la hauteur AB est désignée alors par le nom de *flèche*.

563. Le *secteur sphérique* est la portion de la sphère, décrite par la révolution du secteur circulaire ACM autour de l'axe AC.

Le *secteur sphérique* est donc composé du segment sphérique, ayant pour hauteur la flèche AP, et pour rayon de sa base la ligne PM; et du cône, produit par la révolution du triangle CPM, ayant pour sommet le centre C, pour hauteur la ligne CP, et de plus la même base que le segment.

564. Toute section de la sphère, faite par un plan, est un cercle.

Cette proposition est une conséquence très-naturelle de (322). Tous les points de la section étant également éloignés du centre de la sphère, en vertu de la définition de celle-ci, doivent être aussi également éloignés de tous les autres points de la perpendiculaire, que de ce centre on aura abaissé sur le plan de la section. Ils le seront donc aussi du point d'intersection de cette perpendiculaire avec le plan, lequel par conséquent sera le centre de cette section, nécessairement circulaire.

565. La perpendiculaire élevée dans le centre du cercle qui résulte de la section qui a été faite par un plan quelconque, se nomme *axe* de ce cercle: ses deux extrémités, situées dans la surface même de la sphère, en sont les *poles*.

L'axe d'une section circulaire quelconque est donc aussi diamètre de la sphère. Toutes les sections

tions parallèles entr'elles, ont un axe commun, et les mêmes poles. Le diamètre AB sera l'axe commun de tous les cercles, décrits par les lignes MP, NQ, DC qui sont perpendiculaires sur lui; et ils auront tous pour leurs deux poles, les points A et B.

566. La section circulaire, faite par un plan qui passe par le centre de la sphère, est appellée *grand cercle* de la sphère. Tous les autres sont nommés petits cercles.

C'est ainsi que pendant la rotation du demi-cercle ADB autour de l'axe AB, le rayon CD seul décrit un *grand cercle*; toutes les autres perpendiculaires, telles que PM, QN, décrivent des petits cercles.

567. *Corollaire* I. Tous les points de la circonférence d'un grand cercle sont éloignés de chacun de ses deux poles, d'un quart de la circonférence sphérique.

568. *Corollaire* II. Tous les grands cercles de la sphère sont égaux entr'eux.

569. *Corollaire* III. Deux grands cercles se coupent toujours en deux parties égales, ayant le diamètre de la sphère pour intersection commune.

570. *Corollaire* IV. Tout grand cercle divise la sphère et sa surface en deux parties égales.

571. *Corollaire* V. Tout grand cercle qui est perpendiculaire à un autre, passe aussi par les poles de ce dernier, et est conduit suivant son axe.

572. *Corollaire* VI. Reciproquement, tout grand cercle qui passe par l'un des deux poles d'un autre grand cercle, passera aussi par l'autre, et sera perpendiculaire au plan de ce dernier cercle.

THÉORÈME.

573. *La surface convexe du cône tronqué, produit par la révolution du trapèze rectangle PROM autour de l'axe AB, qui est le diamètre du cercle dont MO est une corde, est égale au produit de PR, hauteur de ce trapèze, par la circonférence du cercle qui a pour rayon l'apothème CN de la corde MO. (Fig. 145.)*

La surface convexe de tout cône tronqué est égale au produit du côté du cône, multiplié par la demi somme des circonférences de ses deux bases (557). Pour trouver dans le cas présent la demi-somme des rayons de ces bases, qui sont les lignes PM et RO, il faut abaisser du centre C sur la corde MO l'apothème CN; alors la ligne QN, parallèle aux deux bases, sera la demi-somme demandée. La surface du cône sera donc égale à la circonférence du cercle dont QN est le rayon, multipliée par MO; ou bien $2\pi QN \times MO$.

Abaissant la perpendiculaire MS, on aura les deux triangles rectangles CQN et OSM (165) qui donnent la proportion QN : CN = SM : MO; d'où il résulte l'égalité des produits $QN \times MO$ et $CN \times SM$; ou bien $QN \times MO$ et $CN \times PR$. La surface convexe du cône sera donc égale à $2\pi\ CN \times PR$: et comme 2π CN est la circonférence

rence même du cercle qui a CN pour rayon, cette expression revient à l'énoncé du théorème.

574. *Corollaire* I. Donc, en supposant les arcs AG, GM, MO, OH etc. égaux entr'eux, ce qui établira aussi l'égalité de leurs cordes et de leurs apothèmes, on aura les surfaces convexes des cônes, produits par la révolution des trapèzes DPGM, REOH, EFHI, FLIK autour de l'axe AB, égaux à $2\pi CN \times DP$, $2\pi CN \times RE$, $2\pi CN \times EF$, $2\pi CN \times FL$.

575. *Corollaire* II. Les surfaces des cônes, produits par la révolution des triangles ADG et BLK, situé aux deux extrémités de l'axe, sont soumis à la même règle. Elles sont égales à $2\pi CN \times AD$, et $2\pi CN \times BL$.

576. *Corollaire* III. Et comme tous ces produits ont le facteur $2\pi CN$ commun entr'eux, la surface convexe, produite par la révolution d'une partie quelconque du contour d'un tel polygone, telle que GMOHI, égale à $2\pi CN \times DF$; ou bien, à la circonférence du cercle dont CN est le rayon, multipliée par DF, partie correspondante de l'axe.

577. *Corollaire* IV. Et si le nombre des côtés du polygone est pair, la surface produite par la rotation de son contour entier autour de l'axe AB est égale à $2\pi CN$, circonférence du cercle, dont l'apothème CN est le rayon, multipliée par le diamètre du polygone AB.

PROBLÈME.

578. Supposant deux polygones réguliers, ayant des contours égaux, mais dont l'un ait un nombre de

de côtés double de celui de l'autre ; on demande le rapport qui est entre les surfaces des corps, produit par la révolution de ces polygones autour de leurs diamètres respectifs. (*Fig.* 101.)

Soit FE, côté du triangle rectangle CFE, le demi-côté de l'un des deux polygones ; soit aussi ABD, base du triangle isoscèle ACD, le côté du polygone qui ait un nombre de côtés double ; et pour que les contours des deux polygones soient égaux entr'eux, supposons FE=AD. Les surfaces des corps, produits par leur révolution autour de leurs diamètres respectifs, seront entr'elles, en vertu du théorème précédent, comme $2\pi CF \times CE : 2\pi CB \times CD$; c'est-à-dire, comme $CF \times CE : CB \times CD$. Le rapport des deux surfaces sera donc visiblement composé des deux rapports qui suivent, CF:CB et CE:CD. Le premier des deux rapports CF : CB se réduit facilement à CL:CA, à cause des triangles semblables CBA et CFL. Reste donc à réduire l'autre CE:CD.

Abaissant de D sur AC la perpendiculaire DN, les triangles semblables DBC et AND fourniront la proportion DN : AD = BC : CD. Et les triangles semblables CFE et CND donneront celle-ci, DN:FE=CD:CE ; ou bien DN:AD=CD:CE, à cause de l'égalité des deux lignes AD et FE. Ainsi les deux rapports CD:CE et BC:CD ou BC:CA étant égaux entr'eux, il sera permis de substituer l'un à l'autre dans celui des deux surfaces qu'on demande ; lequel se trouvera donc réduit au rapport composé des deux rapports CL:CA et CA:BC ; c'est-à-dire, au rapport simple CL:CB.

Ainsi donc, en conservant le contour d'un polygone régulier, mais en doublant le nombre de ses côtés, la surface du corps, produit par sa révolution autour du diamètre se trouvera aggrandie dans le rapport CL:CB. Elle sera donc la plus grande possible, lorsqu'en augmentant le nombre des côtés au-delà de toute quantité assignable, on aura fait disparoitre tous les angles du polygone. Il en résulte le théorème suivant :

THÉORÈME.

579. La surface de la sphère est plus grande que celle de tout autre corps, produit par la révolution d'un polygone régulier, d'un contour égal à la circonférence de son cercle générateur, autour du diamètre.

THÉORÈME.

580. *La surface de la zône sphérique; produite par la révolution d'un arc de cercle quelconque, tel que MN autour du diamètre AB, est égale au produit de la circonférence entière par la ligne PQ, comme étant la partie du diamètre qui répond perpendiculairement à l'arc MN. (Fig. 144.)*

Le cercle n'étant réellement autre chose qu'un polygone régulier d'un nombre infini de côtés, le théorème actuel est compris dans le précédent. En augmentant le nombre des côtés d'un polygone régulier inscrit à un cercle donné, on diminue l'excès que le rayon du cercle a sur l'apothème du polygone.

La dernière limite de l'apothème est le rayon lui-même. La construction géométrique qui apprend à doubler le nombre des côtés, ne conduiroit à cette limite, qu'après avoir été répétée un nombre infini de fois. Mais enfin, ce nombre étant supposé tel que l'apothème devienne égal au rayon, l'angle au centre sera nul, l'angle interne sera égal à deux angles droits, tous les sommets du polygone s'évanouiront, le polygone lui-même deviendra cercle, et le corps produit par sa rotation sera une sphère

sphère. Multipliant la circonférence de cette sphère par la hauteur d'une zône sphérique, on aura donc la surface de celle-ci.

581. *Corollaire* I. La surface de la calotte sphérique, produite par la révolution de l'arc AM autour du diamètre, sera donc égale au produit de la circonférence entière par la flèche AP.

582. *Corollaire* II. La surface de la sphère entière est donc égale au produit de la circonférence, multipliée par le diamètre: ou bien, à quatre fois la surface de son grand cercle.

583. *Corollaire* III. Le quarré du diamètre est donc à la surface de la sphère, comme le diamètre est à la circonférence.

THÉORÈME.

584. *Le corps produit par la révolution du triangle ABC autour de l'un de ses côtés AC, est égal au tiers du produit de ce côté, par la surface du cercle, dont le rayon est la perpendiculaire BD. (Fig. 146).*

Ce corps est visiblement la somme de deux cônes droits, opposés par leur base commune, savoir le cercle décrit du rayon BD, et qui ont pour leurs hauteurs respectives les lignes AD et CD, dont la somme est AC, côté du triangle ABC. Le théorème est donc un simple corollaire de celui qui concerne le volume du cône. (558)

THÉORÈME.

585. *Le triangle ABC étant supposé rectangle en B, et les lignes BE et BF étant égales entr'elles de part et d'autre du point B; étant abaissées de plus des deux points E et F les perpendiculaires EG et FH sur AC, le corps produit par la rotation du triangle isoscèle EAF autour de l'axe AC, sera égal aux deux tiers du produit de la ligne GH, par la surface du cercle, dont le rayon est AB. (Fig. 146.)*

Ce corps sera égal à la différence des deux corps, produits l'un par la rotation du triangle AEC, l'autre par celle du triangle AFC, autour de l'axe commun AC. En vertu du théorème précédent, les volumes de ces corps seront, respectivement égaux aux produits $\pi EG^2 \times AC$, et $\pi FH^2 \times AC$. Le facteur πAC étant commun de part et d'autre, la différence des deux corps reviendra donc au tiers de πAC, multiplié par la différence des deux quarrés de EG et de FH.

Cette différence sera égale à la somme des côtés EG et FH, multipliée par la différence de ces mêmes côtés (212). La première est 2BD; l'autre est EK. Le corps produit par la révolution du triangle AEF autour de l'axe AC sera donc égal aux deux tiers du produit $\pi AC \times BD \times EK$.

La ressemblance des triangles ABC et ADB donne AC:BC=AB:BD : d'où il résulte les produits égaux $AC \times BD$ et $AB \times BC$.

Les

Les triangles semblables ABC et EKF donnent la proportion BC:AB=FK:EK; d'où l'on obtient encore les produits égaux BC×EK et AB×FK.

Multipliant par ordre, et divisant de part et d'autre par le facteur commun BC, le produit AC×BD×EK sera réduit à $AB^2 \times FK$, ou $AB^2 \times GH$. Or πAB^2 est la surface du cercle dont le rayon est AB. Le corps produit par la révolution du triangle AEF autour de l'axe AC sera donc égal aux deux tiers du produit de la surface de ce cercle, multipliée par la ligne GH.

THÉORÈME.

586. *Le polygone régulier AGMOHI etc. étant inscrit au cercle dont le rayon est AC, le corps produit par la révolution d'un secteur quelconque de ce polygone CGMOH autour de l'axe DCE, est égal aux deux tiers du produit de la partie correspondante DE du diamètre, multiplié par la surface du cercle dont le rayon est l'apothème CN. (Fig. 145.)*

Ce corps est la somme des corps partiels, produits par la rotation des triangles isoscèles GCM, MCO, OCH etc. autour de l'axe AB. L'apothême CN étant le même pour tous, le corps entier, en vertu du théorème précédent, sera donc égal aux deux tiers du produit de la surface du cercle dont cet apothême est le rayon, multipliée par la somme des lignes DP, PR, RE etc. c'est-à-dire par la ligne DE, énoncée dans le théorème.

587. *Corollaire* I. Donc, si le nombre des côtés de ce polygone est pair, le corps produit par sa rotation autour du diamètre AB sera égal aux deux tiers du produit de ce diamètre, multiplié par la surface du cercle, qui a pour rayon l'apothême CN; ou de $\pi CN^2 \times AB$.

588. *Corollaire* II. La surface de ce même corps est égale à $2\pi CN \times DE$; ou bien, à la circonférence du cercle dont CN est le rayon, multipliée par DE. Le volume du corps, produit par la rotation du secteur GMOHC, de même que du polygone entier, autour de l'axe AB, sera donc égale au tiers du produit de sa surface par l'apothême.

589. *Corollaire* III. Et comme, en conservant le contour du polygone, et en doublant le nombre de ses côtés, on aggrandit à la-fois son apothême, et la surface du corps produit par sa révolution, on aura donc augmenté à plus forte raison le volume de ce corps.

590. *Corollaire* IV. Ce volume sera donc le plus grand possible, lorsqu'après avoir augmenté le nombre des côtés au-delà de toute quantité assignable, le polygone régulier sera devenu cercle. Le volume de la sphère est donc plus grand que celui de tout autre corps, produit par la révolution d'un polygone régulier, d'un contour égal à la circonférence de son cercle générateur, autour du diamètre.

THÉO-

THÉORÈME.

591. *Le volume de la sphère est égale au tiers du produit de sa surface, multipliée par le rayon.*

Le cercle n'étant en effet qu'un polygone régulier d'un nombre infini de côtés, ayant par conséquent pour apothême le rayon même de la sphère; le théorème actuel sera entièrement compris dans le précédent (587), dont il ne présente qu'un cas particulier.

D'ailleurs, en se représentant la sphère comme composée d'un nombre infini de pyramides, ayant le centre de la sphère pour sommet commun, et son rayon pour hauteur commune, tandis que la totalité de leurs bases est égale à la surface de la sphère, ce théorème est encore un cas très-particulier de celui qui nous apprend, que le volume de toute pyramide en général est égal au tiers du produit de sa base par la hauteur.

592. *Corollaire* I. La sphère est donc égale à quatre fois le produit de la surface de son grand cercle, multipliée par le tiers du rayon: et désignant le rayon par r, on aura $\frac{4}{3}\pi r^3$ pour expression de son volume.

593. *Corollaire* II. Elle est donc égale aussi aux deux tiers du cylindre circonscrit.

594. *Corollaire* III. Elle est au cube de son diamètre, exprimé par $8r^3$, comme π:6. Si l'on exploie pour π le rapport 22:7, la sphère sera au cube de son diamètre, comme 11:21.

595. *Corollaire* IV. Connoissant le volume d'une sphère, le rapport $\pi:6$ fera trouver le cube de son diamètre.

596. *Corollaire* V. Le diamètre de la sphère sera donc au côté d'un cube égal en volume, comme la racine cubique de *six* est à celle de π; ou bien, comme $1:80596$. C'est le rapport des nombres $5:4$; plus exactement $31:25$, ou $67:54$.

597. *Corollaire* VI. Deux sphères inégales sont entr'elles comme les cubes de leurs diamètres. Et réciproquement les diamètres sont entr'eux comme les racines cubiques des volumes de leurs sphères respectives.

THÉORÈME.

598. *Tout segment de sphère, compris entre deux petits cercles parallèles entr'eux, est égal à la demi-somme des bases, multipliée par la hauteur du segment, plus le volume d'une sphère, dont cette hauteur seroit le diamètre.* (*Fig.* 147.)

Le demi-segment circulaire PMLNQ, dont la révolution autour de AB produit un segment sphérique, tel que celui du théorème, est égal au trapèze PMNQ, *plus* le secteur MLNC, *moins* le triangle *isoscèle* MNC. Le segment sphérique du théorème sera donc égal au corps produit par la rotation du trapèze PMNQ, *plus* le corps produit par la rotation du secteur MLNC, *moins* le corps produit par la rotation du triangle MNC, autour de l'axe commun AB.

Le

Le premier de ces trois corps est égal à $\frac{1}{3}\pi PQ$, multiplié par $PM^2+PM\times QN+QN^2$ (559). Le second est égal à $\frac{1}{3}\pi PQ\times 2CM^2$ (586). Le troisième est égal à $\frac{1}{3}\pi PQ\times 2CI^2$ (585).

Comme le facteur $\frac{1}{3}\pi PQ$ est commun à tous les trois, le segment sphérique produit par la rotation du demi-segment circulaire PMNQ, sera égal à $\frac{1}{3}\pi PQ$, multiplié par $PM^2+PM\times QN+QN^2+2CM^2-2CI^2$: ou bien à $\frac{1}{6}\pi PQ$, multiplié par $2PM^2+2PM\times QN+2QN^2+4CM^2-4CI^2$. Il faudra réduire cette expression.

La différence des quarrés de CM et de CI est égale au quarré de MI (208); et prise quatre fois, elle donne le quarré de MN, qui est lui-même égal à la somme des quarrés de KN et de PQ (208). L'expression deviendra donc $2PM^2+2PM\times QN+2QN^2+KN^2+PQ^2$.

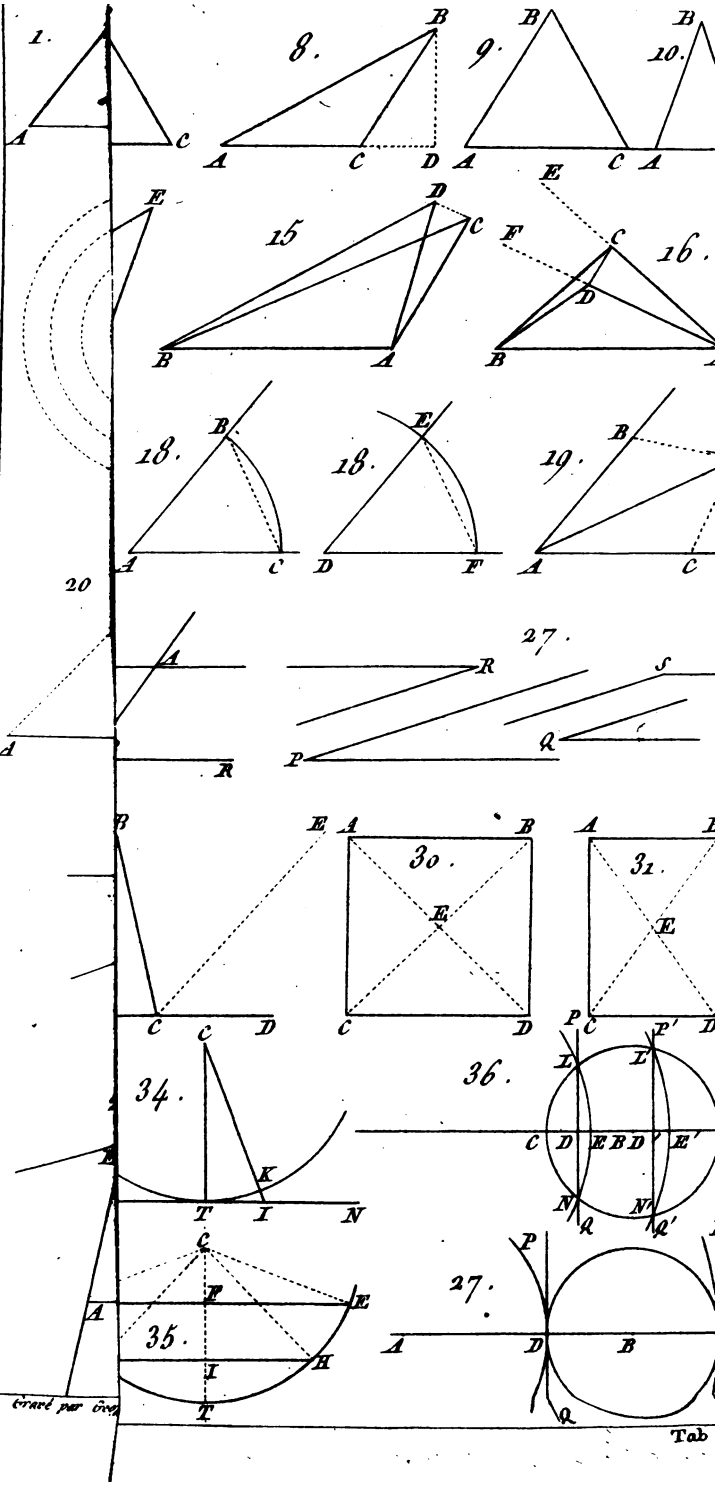
La ligne KN étant la différence des lignes PM et QN, son quarré sera $PM^2-2PM\times QN+QN^2$ (211). Substituant cette expression, on aura $3PM^2+3QN^2+PQ^2$.

La solidité du segment sphérique sera donc composée des deux parties qui suivent. La *première* est $\frac{1}{6}\pi PQ$, multiplié par $3PM^2+3QN^2$, ou $\frac{1}{2}\pi PQ$, multiplié par PM^2+QN^2: c'est la demi-somme des deux petits cercles ayant pour rayons les lignes PM et QN (304), multipliée par la hauteur PQ. La *seconde* sera $\frac{1}{6}\pi PQ^3$, multipliée par PQ^2, ou $\frac{1}{6}\pi PQ^3$; c'est le volume d'une sphère, dont PQ est le diamètre; ce qui est parfaitement conforme à l'énoncé du théorème.

599. *Corollaire* I. Si l'une des deux bases s'évanouit, le corps rond engendré par la rotation du demi-segment AMLNQ autour de l'axe AQ, sera $\frac{1}{2}\pi AQ \times QN^2$, *plus* $\frac{1}{3}\pi AQ^3$; c'est-à-dire, égal à la moitié d'un cylindre de même base et de même hauteur, *plus* le volume d'une sphère, dont cette hauteur seroit le diamètre.

600. *Corollaire* II. Si cette hauteur est fort petite en comparaison du diamètre de la sphère, on pourra dans bien des circonstances supprimer la seconde partie de la formule. Le volume du segment sphérique sera égal alors à la moitié du cylindre, de même base et de même hauteur.

601. *Corollaire* III. Le segment de sphère, compris entre deux cercles parallèles, tels que ceux qui ont pour rayons les lignes PM et QN, est égal au cône tronqué compris entre ces mêmes cercles, *plus* les deux tiers d'un cylindre, ayant leur distance PQ pour hauteur, et la corde MN pour diamètre. *(Fig.* 147.*)*

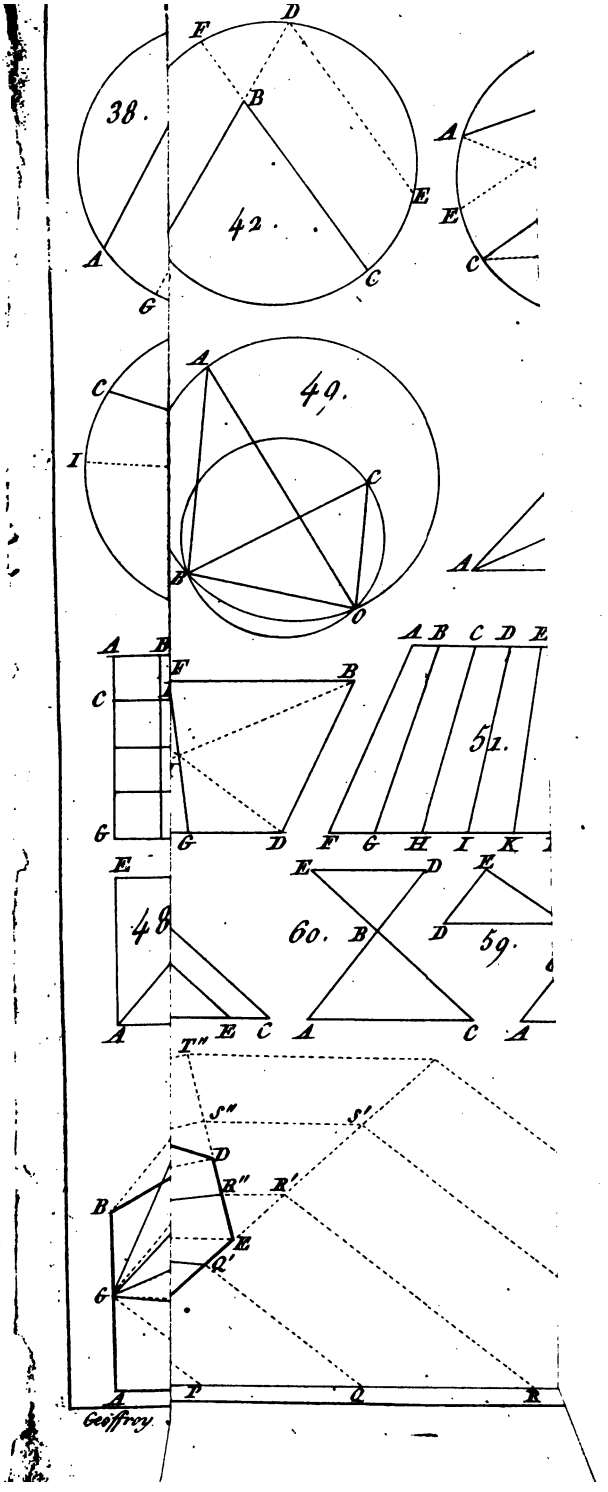


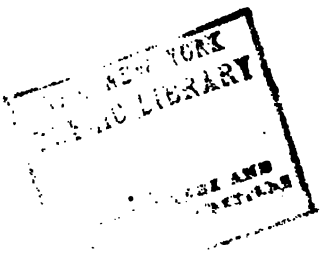
Gravé par Ivq

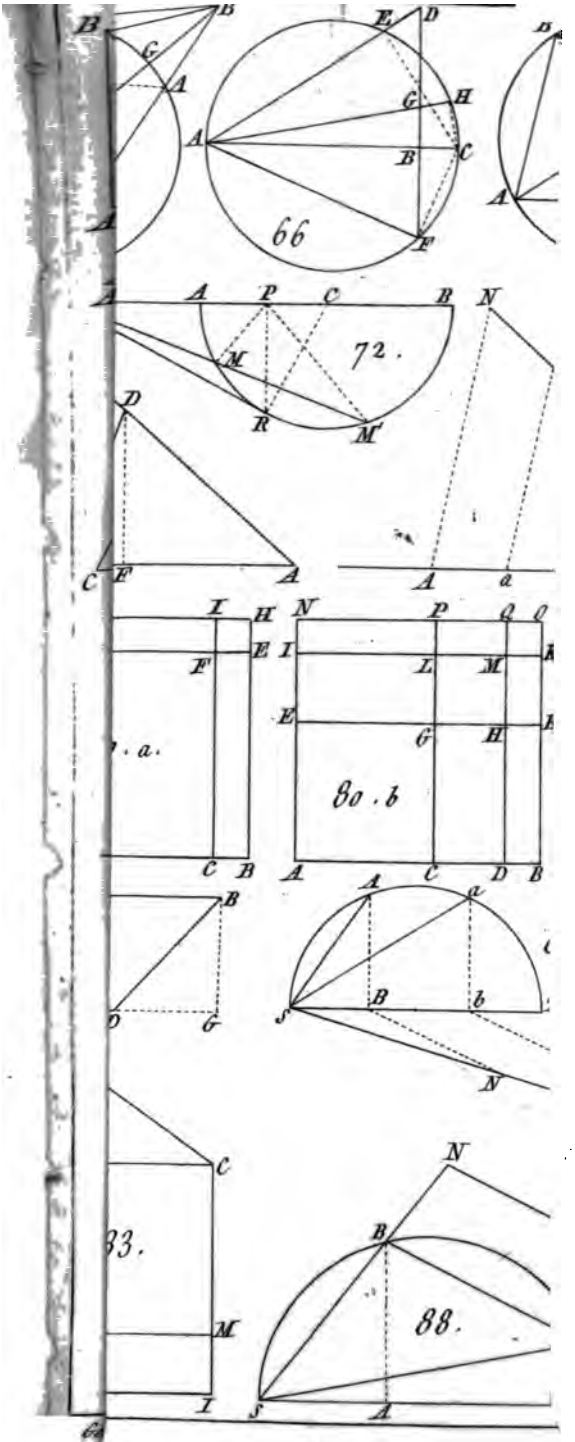
Tab

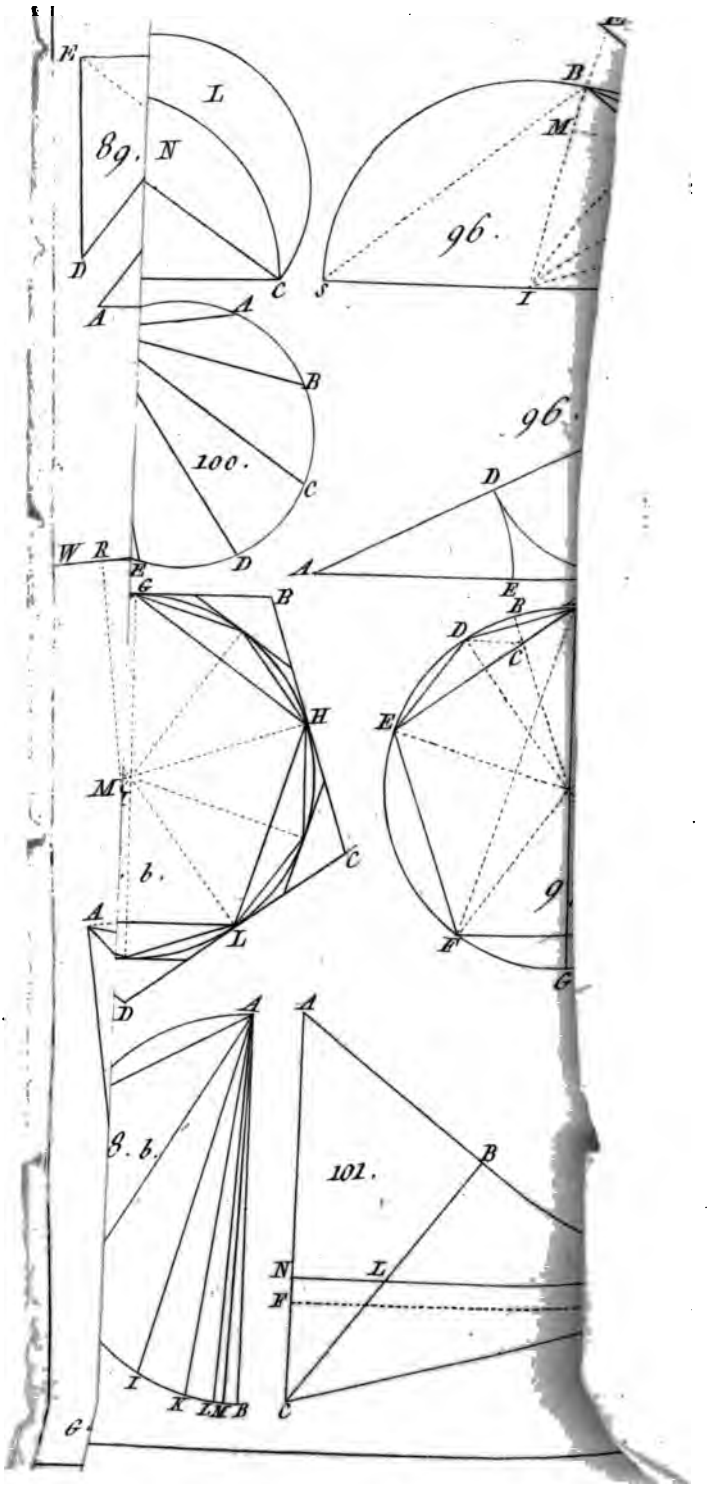
THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND

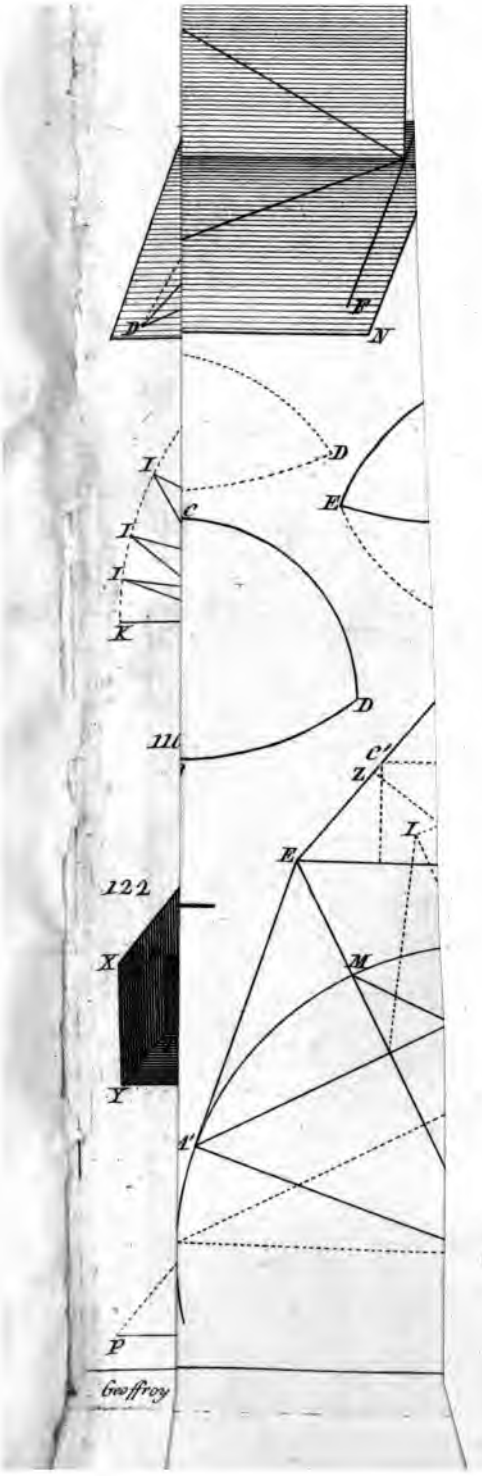

38.
42.
49.
51.
48
60.
59.
Geoffroy.

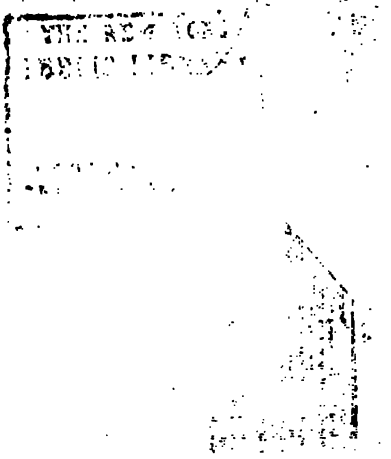

NEW YORK
LIBRARY

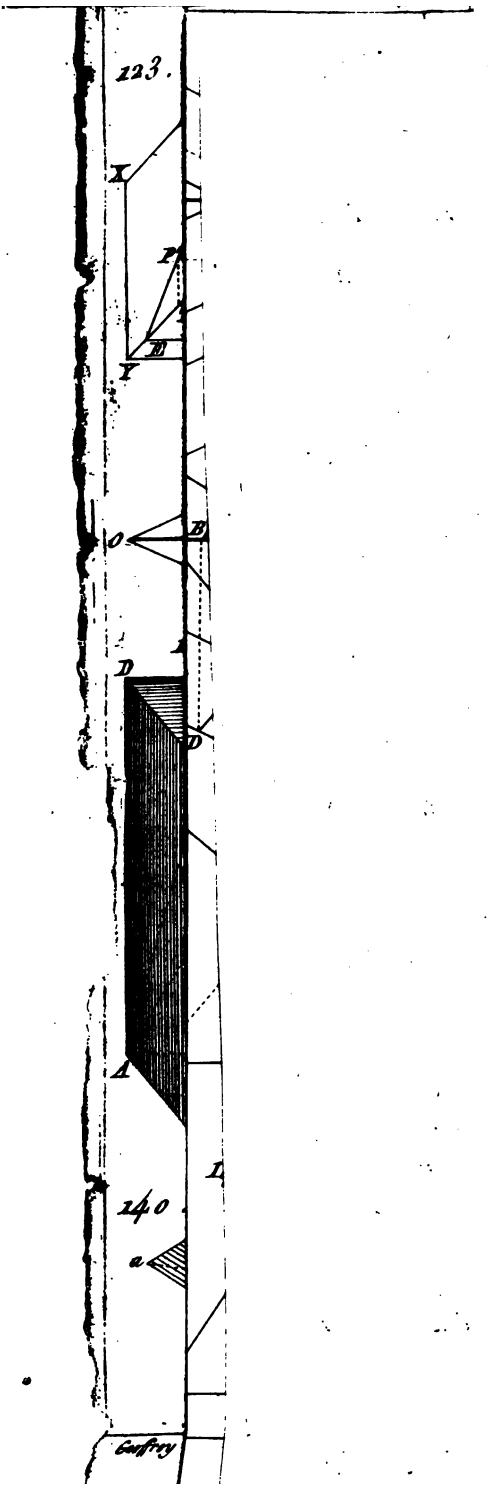
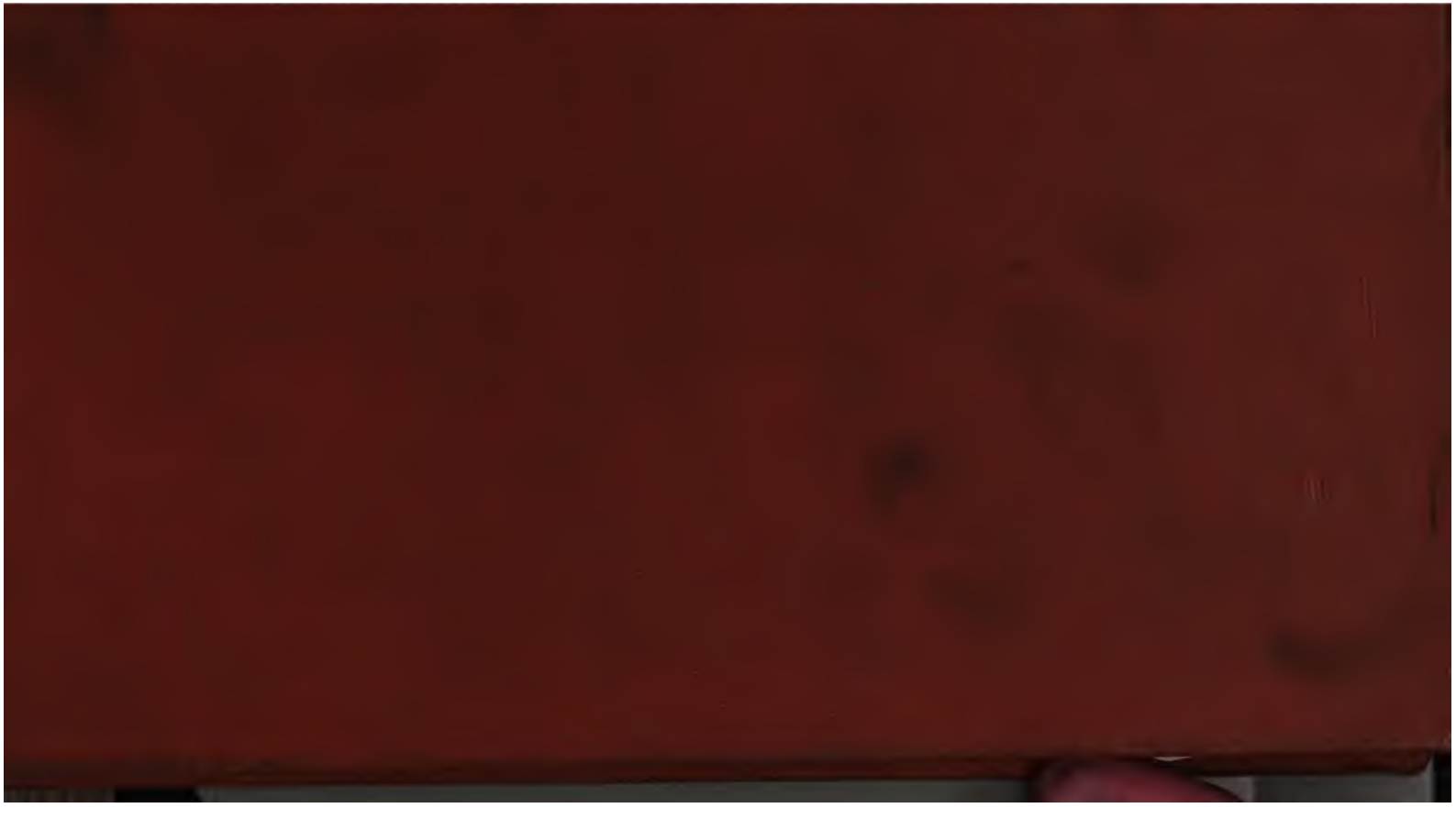

66
72.
80. a.
80. b
83.
88.


F
L
89.
N
D
C
A
A
B
100.
C
D
W R
E
G
B
H
M
C
b.
A
L
D
A
8. b.
I
X
L M B
C
G
B
M
96.
S
I
96.
D
A
E
B
D
C
E
9
F
G
A
101.
B
N
L
F
C

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS


D
N
I
D
E
C
I
I
I
X
D
111
C'
Z
I
E
122
X
M
Y
1'
P
Geoffroy




123.
X
P
M
Y
O
B
D
D
A
240
a
Gaffry